Solomon Marcus

ȘOCUL matematicii

Editura Albatros

SOLOMON MARCUS

ŞOCUL MATEMATICII

Coperta: BOITOR MIHAIL

SOLOMON MARCUS

ŞOCUL MATEMATICII

EDITURA ALBATROS
BUCUREŞTI
1987

ŞOCUL MATEMATICII

Şocul matematicii ...

Şocul trecerii neaşteptate de la banal la ininteligibil.

Şocul primei teoreme şi al primei demonstraţii.

Şocul metodei axiomatice.

Şocul obiectelor „considerate ca date".

Şocul rigorii impuse, dar neînţelese.

Şocul atîtor răspunsuri rămase fără întrebări!

Şocul părintelui care nu-şi mai poate ajuta odrasla la învăţătură.

Şocul mulţimilor infinite şi al proceselor cu o infinitate de etape.

Şocul atîtor adevăruri neintuitive!

Şocul trecerii de la matematica şcolară la cea universitară.

Şocul calculelor nenumerice.

Şocul intrării în profesie.

Şocul matematizării rapide a ştiinţei.

Şocul unui limbaj tot mai artificial, a cărui sintaxă poate prolifera în absenţa semanticii.

Şocul decalajului dintre exactitate şi sens, dintre sens şi valoare.

Şocul în faţa unei comenzi sociale tot mai grave, mai complexe şi mai presante.

Şocul unei societăţi care nu conştientizează decît o parte din nevoia ei de matematică.

Şocul matematicii ca problemă globală; deoarece ştiinţa este o problemă globală a omenirii, iar matematica este o problemă globală a ştiinţei.

Dacă nu este prea puternic, şocul îndeplineşte o funcţie terapeutică. Să încercăm deci să-l preîntîmpinăm şi să-l atenuăm. Către aceasta aspiră cartea de faţă, care în multe părţi ale ei se adresează publicului larg, dar care-şi menţine tot timpul un ochi îndreptat spre elevul aflat în apropierea concursului de admitere în învăţămîntul superior, spre studentul intimidat

de manualele universitare de matematică, spre intelectualul care, independent de specialitatea sa, desluşeşte în matematică un act de cultură care-l priveşte.

*

Prima parte a lucrării grupează, sub titlul generic A FI BUN LA MATEMATICĂ, o seamă de consideraţii privind învăţarea matematicii, concursurile şi examenele de matematică, activitatea de cercetare în domeniul matematicii, colaborările interdisciplinare ale matematicii, funcţia ei socială, semnificaţiile ei culturale şi filozofice. În mod deliberat am alternat chestiuni atît de eterogene, pentru a sublinia solidaritatea tuturor acestor aspecte.

A doua parte a lucrării este de natură mai specială, vizînd unele concepte fundamentale, dintre cele mai delicate ale matematicii, aflate la interferenţa şcolii cu universitatea, dar profitabile pentru orice om de cultură.

Mulţumesc colegilor mei, lector univ. dr. Ion Chiţescu şi asist. univ. dr. Cristian Calude, pentru numeroase observaţii la text, care au permis evitarea unor inadvertenţe. Mulţumesc Editurii Albatros pentru întregul sprijin acordat acestei lucrări.

A FI BUN LA MATEMATICĂ

DOUĂ SCRISORI

„ ... apreciez foarte mult rigoarea şi claritatea matematică, dar pe de altă parte îmi mai place să şi visez. ... Matematica este însă mereu buba. Îmi place mult mai mult algebra decît analiza (este firesc, cred, pentru că este mai uşoară). Cu algebra de a IX-a, a X-a (mai greu), a XI-a şi a XII-a (îmi place foarte mult) mă voi descurca. Dar ce fac cu analiza matematică? ... am înţeles foarte puţin din noţiunea de limită ... v-aş ruga să mă ajutaţi în înţelegerea unor noţiuni fundamentale din analiză, precum şi din algebră ... ar fi un factor moral care să mă mobilizeze să intru la facultate"

Am reprodus cîteva fragmente dintr-o lungă scrisoare primită din partea elevului Teicu Andrei, din ultimul an de curs al unui liceu de filologie-istorie din Bucureşti.

O altă scrisoare interesantă a fost trimisă la redacţia *Ghidului* de către Ioan Balentin, elev în clasa a XI-a, Liceul industrial nr. 13 din Arad: „ ... am avut o vară „fierbinte" anul acesta, datorată examenelor de admitere în treapta a II-a de liceu. Am învăţat zi de zi şi am intrat al 23-lea (pentru 108 locuri), cu media 8,81 ... Dar (şi aici vine un mare DAR) nu ştiu mai departe *unde* să dau în învăţămîntul superior ... Să zicem că ar fi indecizie, lipsă de răspundere, risc. Dar mai este un lucru foarte important: NECUNOAŞTEREA DE CĂTRE MINE (de unde?) A TUTUROR FACULTĂŢILOR, CU PROFILE, SPECIALIZĂRI ŞI MAI ALES DISCIPLINELE DIN CARE SE DĂ EXAMENUL DE ADMITERE LA ACESTE FACULTĂŢI".

Ne pare rău că nu putem reproduce în întregime cele două scrisori, semnificative pentru frămîntările, ezitările şi dilemele elevilor din ultimele clase de liceu, în legătură cu prezentarea lor la examenul de admitere în învăţămîntul superior. Mai întîi am dori să facem cîteva observaţii chiar în legătură cu modul de redactare a acestor scrisori, deoarece carenţele lor de exprimare riscă să devină puncte vulnerabile în viitoarele lor lucrări scrise la examenul de admitere

în facultate. Ne vom referi în primul rînd la un anume stil oral, neîngrijit, incompatibil cu forma scrisă, mai cu seamă atunci cînd este vorba de o scrisoare, ca cele în discuție aici, adresată unei persoane mai în vîrstă sau unei instituții. Ambele scrisori sînt în ansamblu bine alcătuite. Cei doi elevi încep prin a se prezenta, apoi trec la problema care-i preocupă. Impresionantă este, în scrisoarea lui Teicu, evoluția pasiunilor sale, oscilînd între matematică și română, uneori în funcție de persoana profesorului. Furat de relatarea lor, el alunecă însă într-un limbaj neglijent (uneori cu greșeli de exprimare), incompatibil cu forma respectuoasă de adresare, pe care fără îndoială a intenționat-o. „Cred că pentru pregătirea de admitere la A.S.E. nu voi avea probleme cu economia politică, nici cu geografia (papagal, ne-papagal, se învață)". „M-am întors spre această materie cu toată ființa mea (precedenta profesoară nu o puteam suferi)". Însă, în ansamblu, scrisoarea este bine redactată, inadvertențele de tipul menționat fiind rare.

Bine alcătuită, în ansamblu, (deși pe un ton poate prea insistent) este și scrisoarea lui Ioan Balentin. Din păcate, i-au scăpat unele greșeli de ortografie, probabil datorate lipsei de atenție („a-ți putea să-mi ziceți", „vi-am trimis"), abundă prescurtările de cuvinte și exprimările lacunare, ultrasimplificate („unde să dau în învățămîntul superior", „unde să dau mai departe"), unele virgule absente și, mai ales, un mare număr de exprimări care țin mai degrabă de vorbirea necontrolată practicată cu cei foarte apropiați decît de stilul adresării culte: „Veți spune: bine! dar așteaptă să apară un nou număr al Ghidului. Da, dar timpul trece, nu știu pe ce materii să mă pun cu burta pe carte" etc.

Poate că unora li se pare exagerată această insistență asupra modului de exprimare. Ne vom limita aici să constatăm că și pentru admiterea în învățămîntul superior modul de exprimare este esențial, deoarece el determină prima reacție și primul diagnostic ale celui care te ascultă sau te citește. În funcție de acest mod de exprimare și de prezentare a ideilor se apreciază în mare măsură gradul de cultură al candidatului. Un raționament expus într-un limbaj inadecvat, agramat, dezordonat, certat cu ortografia, creează o impresie penibilă, chiar dacă în esența sa este corect.

Cele de mai sus nu ne vor împiedica însă să sesizăm și să dăm curs propunerilor judicioase conținute în cele două scrisori. Pentru a veni în întîmpinarea dorinței exprimate de Teicu Andrei, dar care aparține, fără îndoială, nu numai lui, vom prezenta noțiunea matematică de limită, căutînd

s-o explicăm mai pe îndelete decît se obişnuieşte. Vom continua să prezentăm şi alte concepte fundamentale ale analizei matematice, disciplină dintre cele mai delicate, după cum bine observă elevul Teicu Andrei. O lungă tradiţie a redus pregătirea pentru examenul de admitere la rezolvarea de probleme, uitîndu-se că matematica are şi o parte teoretică şi conceptuală şi că insuficienta înţelegere a acesteia constituie în bună măsură cauza incapacităţii de tratare corectă a unor probleme. Ca multe alte activităţi umane, matematica se bazează pe un echilibru între teorie şi practică. Absenţa uneia dintre ele este un simptom al unei situaţii anormale.

SPRE CE FACULTATE SĂ MĂ ORIENTEZ?

Întrebarea formulată cu insistenţă de Ioan Balentin presupune o întreagă strategie a confruntării diferitelor facultăţi din punctul de vedere al gradului de dificultate pe care-l prezintă la admitere. Ioan Balentin vrea să aibă în faţă situaţia tuturor facultăţilor din ţară (cu profile şi specializări), în ceea ce priveşte materiile cerute la admitere. Alţi viitori candidaţi sînt mai pretenţioşi, ei doresc să afle şi numărul de locuri şi numărul probabil de candidaţi, pe baza cifrelor din anii anteriori. Desigur, o informaţie, chiar şi aproximativă, de acest tip constituie un indicator de o oarecare utilitate. Sper ca ei să capete un răspuns cît de cît satisfăcător, din păcate nu îl putem da acum aici. Ne întrebăm însă întrucît un asemenea răspuns poate constitui un criteriu fundamental în alegerea facultăţii. Într-adevăr, alegerea facultăţii înseamnă alegerea profesiunii. Este oare normal, este bine ca o alegere atît de importantă să depindă de factori atît de conjuncturali ca numărul probabil de candidaţi? Am întîlnit această mentalitate la mulţi elevi. Unii dintre ei erau vizibil marcaţi de dorinţa de a intra la facultate cu orice preţ; nu la o facultate şi o secţie anume, ci la facultate pur şi simplu. Am cunoscut în urmă cu doi ani o elevă care ar fi dorit să intre la secţia de engleză a Facultăţii de Limbi Străine, dar după ce obţinuse informaţiile de tipul celor menţionate mai sus, nu s-a mai prezentat la engleză, ci la ... sîrbocroată.

Pot aduce în această discuţie şi o amintire personală. În 1944, proaspăt bacalaureat, eram preocupat de alegerea unei facultăţi. M-am decis să merg la Facultatea de Ştiinţe, secţia Matematică. Tatăl meu era foarte nemulţumit de

decizia mea, îmi dădea mereu exemplul unor profesori de matematică pe care-i compătimea pentru situația lor materială precară. Totuși, nu mi-am schimbat decizia, în ciuda faptului că alte facultăți ofereau în acel moment o perspectivă profesională mai clară, mai avantajoasă. Mi s-a părut că alegerea profesiunii este o chestiune prea importantă pentru ca ea să depindă de factori conjuncturali. În plus, părea și dificil de evaluat, în acel moment de profunde și rapide transformări, încotro vor evolua profesiile. Mi s-a părut că esențial este ca, dintre specialitățile sau profesiile de care orice societate are nevoie, să-mi aleg una pe care o voi putea practica, dacă nu cu pasiune, măcar cu plăcere. Este inutil să adaug faptul că, la scurt timp după absolvirea facultății, apăruseră, pentru specialitatea mea, posibilități și perspective care nu puteau fi nici măcar bănuite în 1944. Dar chiar dacă nu ar fi apărut aceste posibilități și aș fi rămas de-a lungul întregii mele vieți un profesor de matematică într-o școală oarecare sînt convins că și în acest caz aș fi cules multe satisfacții profesionale.

Momentul actual este și el unul de rapide și nu întru totul previzibile transformări în ceea ce privește structura și distribuția profesiunilor. Sub presiunea dezvoltării revoluției științifice-tehnice și a nevoilor sociale, configurația profesiunilor se schimbă și ea. Important este, în aceste condiții, să te îndrepți spre o profesiune de care simți că te leagă ceva mai profund decît o situație de moment; spre o specialitate suficient de cuprinzătoare pentru a te putea ulterior adapta ușor la formele noi pe care ea le va căpăta. Să nu uităm nici faptul că, orice specialitate vei alege, pregătirea și perfecționarea profesională nu se vor încheia odată cu intrarea în profesie, ci vor continua încă multă vreme, deci va fi nevoie mereu de noi resurse intelectuale și afective, cu ajutorul cărora să faci față acestor solicitări. În aceste condiții, devine foarte imprudent să-ți alegi o profesie pentru care nu ai suficientă atracție, numai pentru că intrarea în facultatea respectivă a prezentat mai puține dificultăți. Astfel de imprudențe se plătesc scump mai tîrziu.

STUDENT CU ORICE PREȚ ?

Discutam cu o studentă care intrase în facultate cu media 5,15 la examenul de admitere și se prezenta foarte slab la examene. Am întrebat-o cum vede viitorul ei și mi-a dat un răspuns neașteptat: „Nu cred că profesoara mea de mate-

matică din școală era mai bine pregătită decît sînt eu acum. Așa cum ea a făcut față și s-a descurcat în profesie, mă voi descurca și eu". Poate că, într-adevăr, avusese o profesoară slabă. Trebuia adoptată ca model de urmat? În ipoteza că această studentă a fost „victima" unor profesori slabi de matematică (și, poate, și de alte discipline), nu ar fi acest fapt un motiv temeinic de a nu repeta această situație, de a nu deveni un profesor slab, care mutilează intelectul a sute și sute de elevi? Meseria de profesor este, poate mai mult decît multe altele, o problemă de conștiință. Singurul control continuu exercitat asupra activității unui profesor este propriul său autocontrol. În fața unei clase de adolescenți care nu au încă nici cunoștințele, nici discernămîntul necesare pentru o preluare critică a ceea ce emană de la catedră, profesorul își exercită influența sa lentă, dar sigură și de durată, cu efecte de multe ori ireversibile. El poate stimula intelectul elevilor săi, dar în același timp îl poate adormi sau mutila. Singurul martor al acestui proces este propria sa conștiință. Dacă profesorul nu-și iubește meseria și nu are o minimă competență profesională, victimele sale, chiar dacă nu conștientizează pentru moment daunele care li se provoacă, vor realiza aceasta mai tîrziu, iar profesorul respectiv va rămîne în amintirea lor într-o postură care nu este de invidiat.

În urmă cu ani, s-a reprezentat la noi piesa de teatru „Lecția" a lui Eugen Ionescu. Este vorba acolo despre un profesor care-și terorizează elevele, aducîndu-se și pe sine într-o stare de disperare, de pe urma căreia le ucide. Desigur, este vorba de o hiperbolă textuală, dar ea exprimă cu putere starea de stres pe care o poate genera un învățămînt în care relația profesor-elev produce o adevărată escaladare a plictiselii, neparticipării și incompetenței.

Este oare firesc și cinstit pentru un tînăr din ultimele clase liceale să se angajeze pentru o viață într-o asemenea cursă nebunească? Este oare o strategie adecvată încercarea de a păcăli societatea, simulînd o activitate pentru care, de fapt, nu ai nici pregătirea profesională necesară, nici o cît de vagă motivație psihologică? Dincolo de culpabilitatea morală a unui comportament de acest fel, nu este greu să demonstrăm că sînt din ce în ce mai puține șanse ca o atare strategie să mai fie viabilă în deceniile în care tinerii de azi își vor exercita profesia. Într-adevăr, ritmul de înnoire a programelor și planurilor de învățămînt, a manualelor școlare va fi din ce în ce mai rapid, pentru a se putea face față exigențelor unei lumi în care nevoile cresc

exponențial, iar satisfacerea lor crește deocamdată mai lent (atunci cînd nu stă pe loc). Nivelul general al elevilor va crește și el, chiar dacă unele fenomene dau o impresie opusă. Cei care se vor strecura într-o anumită profesie într-un mod neonorabil se vor găsi din ce în ce mai izolați și arătați cu degetul. Interesele pe termen lung ale oricărui tînăr recomandă o strategie onestă și rezonabilă, adecvată posibilităților și perspectivelor reale.

În ce constă această strategie onestă? Ea este foarte simplă. Îi cere tînărului să examineze cu luciditate și răspundere posibilitățile și afinitățile sale reale, iar în raport cu ele să manifeste ambiția de a se realiza plenar și grija de a-și făuri planuri pe măsură. Aceasta înseamnă, în primul rînd, să nu cauți să devii student cu orice preț, oricum și oriunde; există atîtea profesiuni frumoase și de mare utilitate socială care nu cer o pregătire în cadrul învățămîntului superior. În al doilea rînd, dacă totuși ți s-a cristalizat preferința pentru o anumită profesie, să nu accepți compromisuri legate de avantaje de moment, dar care se răzbună apoi de-a lungul întregii vieți. A ignora aceste lucruri înseamnă a crea un focar de tensiune și stres care se soldează cu pagube enorme atît pentru individ cît și pentru societate.

MATEMATICA ȘI ALEGEREA PROFESIUNII

Alegerea unei profesiuni se face în bună măsură în funcție de relația în care te afli cu matematica. De obicei, elevii buni la matematică, cei care au încredere că vor putea face față unor discipline matematizate, se îndreaptă spre facultăți de profil ingineresc, cibernetico-economic sau spre științe pozitive (matematică, fizică, chimie); ceilalți se îndreaptă cu precădere spre specialități la care matematica sau este absentă sau are o prezență mai redusă (medicină, drept, agronomie, filologie, filozofie-istorie, geologie-geografie etc.). Desigur, excepțiile de la această regulă nu lipsesc și este de prevăzut că ele vor deveni tot mai numeroase, transformînd regula existentă într-o regulă nouă. Dar nu vrem să discutăm aici legitimitatea acestei strategii într-o perspectivă mai îndepărtată, în care nici o profesie nu va mai putea evita matematica și calculatoarele. Fapt este că, în momentul de față, diferitele specializări existente în învățămîntul superior se disting după exigențele mari, în unele cazuri, mici sau cu totul absente în altele — în

ceea ce privește prezența matematicii la examenul de admitere.

Față de această situație, este important pentru fiecare elev să evalueze corect posibilitățile sale de a face față unor *discipline de structură matematică*; aceste discipline nu se reduc la cele strict matematice, cum ar fi algebra, analiza sau geometria, ci includ o mare varietate de științe ale naturii (mecanică, fizică teoretică, chimie teoretică) și de discipline inginerești sau economice. S-ar părea că problema este simplă și că notele obținute la matematică, în școală, sînt suficiente pentru a pune un diagnostic corect asupra capacității de gîndire matematică a unui elev. Desigur, aceste note nu pot fi ignorate, dar nici nu pot fi transformate într-un indicator sigur al randamentului pe care un tînăr îl va obține la matematică, în învățămîntul superior. Matematica predată în învățămîntul superior este, în cele mai multe cazuri, foarte diferită ca structură și grad de abstractizare de matematica pe care elevii o practică în școală. Lucrul acesta este mai greu vizibil în manuale. De exemplu, între manualele de analiză matematică din ultimele două clase de liceu și cursul de analiză matematică din anul întîi al unei facultăți inginerești de construcții deosebirea este mai degrabă cantitativă decît structurală.

O SCHIMBARE RADICALĂ DE LA LICEU LA FACULTATE

Situația de fapt este însă cu totul alta. Din discuții cu numeroși elevi și profesori am aflat că cei mai mulți elevi nu folosesc manualele de matematică decît pentru partea de exerciții, cunoștințele teoretice fiind asimilate pe baza notițelor de la clasă. Structura aproape exclusiv aplicativă a probelor de matematică la admiterea în învățămîntul superior orientează preocupările elevilor spre exerciții și calcule practice, cu neglijarea regretabilă a chestiunilor teoretice. În consecință, atunci cînd totuși unele probleme, la examenul de admitere, conțin și elemente teoretice, se înregistrează răspunsuri slabe chiar din partea multor candidați care la alte chestiuni, mai practice, dau răspunsuri bune. Tocmai aici se manifestă o schimbare radicală de punct de vedere, în trecerea de la liceu la facultate; partea teoretică, anterior neglijată, marginalizată, devine acum la fel de importantă ca și partea aplicativă. Fără cunoașterea conceptelor, teoremelor și demonstrațiilor nu poate fi promovat un examen de matematică în învățămîntul superior și,

mai important, nu poate fi înțeles un curs de fizică sau de tehnică bazat pe o anumită cultură matematică.

Importanța pe care o capătă, în învățămîntul superior, partea teoretică a matematicii determină o modificare esențială a tipului de antrenament matematic necesar pentru promovare. Studiul pe baza unui curs sau a unui manual devine esențial. Nu mai este vorba acum de a pregăti o singură chestiune, de pe o zi pe alta (ca la școală), ci de a-ți organiza studiul unei întregi discipline, deci al unei materii vaste, de-a lungul unei perioade de cîteva luni. În locul unei scadențe de cel mult 24 de ore („mîine s-ar putea să fiu examinat la matematică!") apare, acum o scadență îndepărtată, de mai multe luni (examenul de sfîrșit de semestru sau de an). Este ca și cum ai trece de la proba de o sută de metri la proba de maraton. Dozarea efortului devine esențială. O altă mentalitate trebuie să-și facă loc, în care capacitatea de autocontrol și de elaborare a unei strategii pe termen lung este decisivă. În această strategie intră ca o componentă importantă puterea de concentrare asupra unei activități de durată, de urmărire metodică a ei, independent de un eventual control din afară (chiar dacă un atare control apare, sub forma unor probe de control sau în cadrul orelor de seminar).

Desigur, acest ultim aspect nu este specific matematicii, fiind o trăsătură generală a activității universitare, o trăsătură distinctivă în raport cu activitatea anterioară, la liceu. Aici își află, de altfel, una din surse șocul pe care-l constituie trecerea de la liceu la facultate, șoc pe care-l putem amortiza, dar nu-l putem reduce complet. Totuși, matematica prezintă, într-o mai mare măsură decît alte discipline, caracterul metodic, de durată, despre care am vorbit mai sus. Acest fapt se leagă de un aspect fundamental al gîndirii matematice, căruia îi consacrăm paragraful următor.

GÎNDIREA MATEMATICĂ PROCEDEAZĂ ÎN ETAPE

Titlul acestui paragraf poate să pară un truism. Oare numai matematica procedează în etape? Nu este această o trăsătură a gîndirii științifice în general? Nu întîlnim chiar în activitățile practice numeroase situații în care gîndirea procedează în etape? Nu așa procedează diplomatul, juristul, contabilul, economistul, tehnicianul? Răspunsul este, fără îndoială, afirmativ. În orice situație de o oarecare complexitate, gîndirea procedează la descom-

punerea în componente a situației respective, fiecare componentă fiind analizată separat, pentru ca apoi să se procedeze la corelarea acestor analize. Procedăm în acest fel nu numai în așa-numitele științe pozitive, ci și în discipline descriptive ca istoria sau geografia sau în discipline în care predomină intuiția și afectivitatea, ca literatura, muzica și artele vizuale. În geografie, de exemplu, se procedează în etape, studiindu-se geografia fizică, apoi cea economică, apoi cea politică. În analiza lingvistică se separă componenta fonetică de cea fonologică, iar acestea sînt separate de componentele morfologică, sintactică și semantică. Aceste analize reprezintă etape ale unui itinerar în care diferitele componente sînt ordonate. Se pune problema: cît de riguroasă este ordinea în care se succed aceste etape și în ce măsură o etapă oarecare se prevalează de etapele anterioare? Tocmai în legătură cu această întrebare apare o diferențiere netă între matematică și celelalte discipline. În disciplinele neformalizate, legătura dintre diferitele etape ale demersului nu este atît de puternică încît o anumită etapă să devină ininteligibilă fără cunoașterea etapelor anterioare.

O relativă independență a etapelor face posibilă o abordare pe cont propriu a fiecărei etape în parte, ordinea de abordare neimpunîndu-se cu deosebită stringență. Astfel, geografia economică poate fi studiată pînă la un anumit punct chiar dacă n-am aprofundat în prealabil geografia fizică, iar analiza sintactică a unui text nu devine ininteligibilă fără o analiză fonologică prealabilă. Fenomenul devine și mai pregnant în cazul unui text mai scurt, să spunem de o pagină. Într-o succesiune de cîteva fraze sau de cîteva alineate dintr-un text de zoologie sau de istorie, dependența fiecărei fraze de frazele precedente, a fiecărui alineat de alineatele precedente este incomparabil mai redusă decît într-un text de matematică, datorită caracterului mai degrabă descriptiv decît demonstrativ al considerațiilor.

REFERIREA NECONTENITĂ LA FAPTELE ANTERIOARE

Altfel se întîmplă într-un text matematic. Dacă dintr-un manual de matematică, să spunem din primul său capitol, s-au desprins primele pagini, în care se află definițiile pe care se bazează considerațiile ulterioare, restul capitolului devine aproape ininteligibil. La rîndul său, întregul capitol condiționează înțelegerea capitolelor următoare. Dacă, de exemplu, dintr-un manual de Analiză se pierd paginile

consacrate noțiunii de trecere la limită, capitolele următoare, relative la continuitate și la derivabilitate, sînt în bună măsură compromise. Acest fenomen, al dependenței stricte a fiecărei părți de părțile precedente, devine și mai vizibil pe parcursul unor texte mai scurte. Luați, de exemplu, demonstrația unei teoreme. Textul ei nu poate fi urmărit și înțeles fără citirea prealabilă a enunțului teoremei respective, pentru a se ști de la ce ipoteze se pleacă și la ce concluzie trebuie să ajungem. La rîndul său, enunțul nu poate fi nici el înțeles fără cunoașterea modului în care s-au definit anterior conceptele utilizate în enunț. Pe parcursul demonstrației se pot folosi unele teoreme, leme sau corolare anterioare. Apoi, întreaga structură a unei demonstrații matematice este o înlănțuire de silogisme în care concluzia dintr-un silogism devine premisă într-un silogism următor. Acest fapt transpare și din structura lingvistică a unei demonstrații, în care revin mereu expresii ca *fie, deoarece, prin urmare, însă* și altele echivalente. Folosirea unei teoreme anterioare revine la ceea ce se numește în logică o judecată de predicție universală. Trebuie urmărite în permanență atît adevărul premiselor, cît și corectitudinea inferențelor efectuate. Această grijă permanentă pentru structura logică a demonstrațiilor matematice se situează în primul plan al atenției începînd cu sfîrșitul secolului al XIX-lea. Pînă atunci, matematica lucra cu raționamente ale logicii comune, bazate pe principiile logicii întemeiate de Aristotel: principiul identității ($A = A$), principiul necontradicției (nu este posibil să avem în același timp A și *non* A) și principiul terțului exclus (avem sau A sau *non* A: a treia posibilitate nu există). Apariția unor situații în care părea inevitabilă încălcarea unuia sau altuia dintre aceste principii (cea mai importantă fiind încălcarea principiului necontradicției, de exemplu în antinomiile teoriei mulțimilor) i-a determinat pe matematicieni și logicieni să întreprindă o adevărată radiografie a structurii raționamentului matematic. Ceea ce timp de peste două mii de ani era rezultatul logicii curente a simțului comun devenea acum un obiect pus la microscop și examinat în toate încheieturile sale. Astfel au luat naștere teoria demonstrației și teoria sistemelor formale, de care se leagă în primul rînd numele lui David Hilbert, unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului nostru. Hilbert a pus în evidență, în cadrul unei demonstrații matematice, componentele ei fundamentale: un *vocabular* V, o mulțime de *termeni* (sub forma unor *cuvinte* pe V), o mulțime de *relații* (alte cuvinte pe V), o parte din relații, sub formă de *teoreme*,

o parte din teoreme, sub formă de *axiome* şi ceea ce se numeşte un *text demonstrativ*, adică un şir de relaţii astfel încît orice relaţie din şir sau este o axiomă, sau poate fi dedusă din relaţiile precedente din şir, prin folosirea unui sistem determinat de *reguli*. O teoremă se caracterizează prin faptul de a fi o relaţie pentru care există un text demonstrativ care o conţine.

CAPACITATEA DE CONCENTRARE A ATENŢIEI

Am descris această reprezentare modernă a demonstraţiilor matematice pentru a se vedea cît este de puternică structura ei de lanţ în care fiecare verigă depinde esenţial de verigile precedente. Dacă această structură de înlănţuire riguroasă, în care omiterea unei singure verigi poate compromite întregul lanţ, este tipică pentru gîndirea matematică, nu este mai puţin adevărat faptul că tot mai multe domenii rîvnesc azi la dobîndirea unei structuri similare. Aşa s-a ajuns la constituirea unor domenii ca fizica matematică, chimia matematică (a se vedea revista germană *Match*, prescurtare a expresiei *Mathematical Chemistry*), biologia matematică, psihologia matematică, economia matematică, lingvistica matematică etc. Gîndirea în etape riguros înlănţuite devine astfel un deziderat major fundamental al ştiinţei (şi nu numai al ei).

Ne dăm astfel seama că *formarea gîndirii matematice este indisolubil legată de deprinderea capacităţii de procedare în etape riguros înlănţuite*. Însă o atare deprindere cere, la rîndul ei, o *concentrare puternică a atenţiei*. O ilustrare a acestui fenomen este oferită de calculele matematice, unde procedarea în etape care depind strict de etapele precedente este mai explicită decît în orice alt tip de text matematic. A conduce bine pînă la capăt un calcul matematic mai lung este una din probele prin care trebuie să treacă cu succes orice viitor candidat la un concurs de matematică. Dar această probă cere un exerciţiu îndelungat, tocmai pentru că gradul de concentrare a atenţiei trebuie să fie aici mai ridicat decît în raţionamentele curente, de fiecare zi. De multe ori, candidaţii care obţin note mici la un examen de matematică se consideră nedreptăţiţi cînd soluţiile obţinute de ei sînt greşite datorită unor scăpări de atenţie; dar unul din scopurile probelor de matematică este tocmai verificarea capacităţii de concentrare asupra unui raţionament matematic mai lung.

Dependenţa strictă a fiecărei etape a unui text matematic de etapele anterioare se manifestă şi prin aceea că nicăieri mai mult decît aici nu simte cititorul nevoia de a întoarce mereu paginile înapoi, de a revedea mereu textul deja parcurs, de a controla enunţul teoremelor şi definiţiilor anterioare. Faptul acesta poate chiar să devină uneori sîcîitor, de aceea cel care studiază o disciplină matematică reuşeşte, pe măsură ce avansează în studiu, să se familiarizeze cu conceptele, notaţiile şi rezultatele de bază, nemaisimţind nevoia să se întoarcă, pentru ele, la textul deja parcurs. Relaţiile trigonometrice fundamentale le avem în memorie nu pentru că le-am învăţat odată pe dinafară, ci pentru că le-am utilizat de foarte multe ori. La fel s-a întîmplat cu regulile de calcul cu logaritmi, cu formulele care dau lungimile, ariile şi volumele în geometria plană şi în spaţiu, cu formulele de derivare a funcţiilor elementare, cu calculul primitivelor ş.a.m.d.

Este foarte important ca exerciţiul îndelungat să antreneze astfel şi să îmbogăţească memoria matematică, pentru ca urmărirea unui text matematic să nu fie prea des întreruptă de revenirea la etape anterioare. Ideea după care memoria nu ar avea un rol important în matematică este greşită. Este însă vorba aici nu de memorizarea deliberată a unor definiţii, enunţuri, formule, la primele contacte cu acestea (deci într-un moment în care ele nu au fost încă nici aprofundate, nici suficient folosite), ci de reţinerea lor ca o consecinţă firească a utilizării lor repetate şi îndelungate. Este de fapt exact ceea ce se întîmplă cu cuvintele în exprimarea de fiecare zi; ajungem să nu le mai căutăm, pe cele mai multe, în dicţionar, nu pentru că le-am memorat definiţia la primul contact cu ele, ci pentru că le-am întîlnit şi le-am folosit de numeroase ori, în contexte dintre cele mai variate. Deprinderea matematicii seamănă, din acest punct de vedere, cu învăţarea unei limbi străine. La început, consultăm mereu dicţionarul, dar pe măsură ce înaintăm în practica limbii respective căutarea în dicţionar devine tot mai rară. O anumită memorie lingvistică se formează în mod natural; procesul de formare a unei memorii matematice este de o natură asemănătoare.

Matematicianul Paul R. Halmos a explicat, într-un articol, cum se redactează un text matematic. După părerea sa, redactarea decurge aproximativ în felul următor: după redactarea primei pagini, o recitim şi o revedem, înainte de a trece la redactarea paginii a doua; după redactarea paginii a doua, revedem primele două pagini înainte de a trece la redactarea paginii a treia ş.a.m.d. În esenţă, este vorba aici despre faptul că fiecare pagină apare într-o lumină nouă, pe măsură ce alte pagini i se adaugă, datorită faptului că ea este folosită mereu în cele ce urmează după ea. Desigur, fenomenul acesta are loc, într-o anumită măsură, în orice text, dar în textul matematic această corelaţie a fiecărei părţi atît cu părţile anterioare, cît şi cu cele ulterioare este deosebit de puternică.

Este însă lesne de înţeles că dacă redactarea unui text matematic se supune acestui du-te-vino necontenit, lectura şi studiul unui asemenea text se supun aceleiaşi necesităţi. Acesta este avantajul pe care ni-l oferă o lectură retrospectivă a întregii materii dintr-un manual: posibilitatea de a raporta fiecare lucru la tot ceea ce se află înainte şi după el. De exemplu, o întrebare ca: *În ce fel şi unde anume este folosită teorema creşterilor finite a lui Lagrange în Analiza matematică?* nu-şi poate căpăta răspunsul decît după ce am parcurs întregul manual şi l-am reparcurs în maniera indicată de Halmos. Este însă uşor de înţeles că acest tip de studiu cere timp, el este incompatibil cu o lectură grăbită, înainte de examen.

Aceluiaşi deziderat, al revenirii necontenite, se supune şi redactarea răspunsurilor la un concurs matematic, cum este cel de admitere în învăţămîntul superior. Unele simplificări, evitarea unor scăpări, o exprimare mai clară şi mai precisă devin uneori posibile abia la a doua sau la a treia lectură. Tot aşa, în studiul unui manual, anumite nedumeriri, unele semne de întrebare îşi pot căpăta răspunsul după ce am parcurs continuarea, tot aşa cum, într-un război, o armată înaintează încercuind unele puncte mai greu de cucerit, dar care ulterior capitulează ca urmare a înaintării generale pe care armata o realizează.

Am văzut că procedarea în etape riguros ordonate la care se supune gîndirea matematică este strîns legată de natura deductivă a acestei gîndiri. Am putea spune chiar că acest aspect deductiv este cel mai vizibil în textele de matematică. Structura generală aproximativă a acestor texte este: Introducere, definiții, notații, teoreme, corolare, observații, exemple, aplicații, din nou definiții, notații, exemple, teoreme etc. Aspectul general este cel al unui lanț de raționamente întrerupt din cînd în cînd de unele exemple, aplicații și noi definiții.

Această structură caracteristică a unui text de matematică îl face foarte ușor de recunoscut. „Jargonul" matematic sare în ochi, nu poate fi confundat nici cu cel botanic, nici cu cel geografic. La această ușurință de a diagnostica un text ca matematic contribuie și prezența formulelor, care de obicei sînt o componentă esențială a multor definiții, teoreme și demonstrații matematice. Este interesant de observat, în această privință, că pe cît de ușor este de a recunoaște limbajul matematic, pe atît de dificilă este definirea matematicii. În această privință, nu s-a ajuns la un consens, nu există o definiție unanim acceptată a matematicii. După o definiție mai veche, matematica era știința care se ocupă de aspectele cantitative și spațiale ale realității, însă această formulare a devenit cu totul insuficientă față de evoluția matematicii moderne (ca să nu mai vorbim de faptul că de aspecte cantitative se ocupă și alte discipline, de exemplu fizica).

Desigur, în funcție de natura sa, un text matematic poate conține și alte componente, de exemplu figuri și desene. Dar rolul acestora este de obicei neesențial, fiind vorba de un simplu auxiliar care să ajute intuiția sau de un mod de a indica anumite convenții de notație sau de a exprima mai direct și mai simplu o situație care, descrisă în cuvinte, ar reclama un text prea lung. Însă figurile și desenele conțin, de cele mai multe ori, particularități străine problemei în discuție. Trebuie, de aceea, foarte multă atenție pentru a nu implica aceste particularități în considerațiile noastre. De exemplu, într-o problemă care se referă la un triunghi oarecare, desenul riscă să introducă o particularitate datorită căreia triunghiul desenat să nu mai fie oarecare. De altfel, este în principiu imposibil de desenat un *triunghi oarecare*, deoarece orice desen comportă precizarea unui *triunghi individual*, în timp ce expresia „triunghi oarecare" se referă

la *clasa tuturor triunghiurilor*. În această privință, trebuie să avem mereu în minte observația marelui matematician Henri Poincaré, după care matematica este, într-un anume sens, arta de a raționa corect pe figuri greșite.

DOUĂ ATITUDINI FAȚĂ DE MATEMATICĂ

Acceptînd deci această realitate preponderent deductivă a unui text de matematică, să vedem dacă și în natura ei intimă matematica este înainte de toate deducție logică. Să deschidem manualul de geometrie de clasa a VI-a (ediția 1979) de prof. univ. Ion Cuculescu și prof. Constantin Ottescu. Alegem geometria de clasa a VI-a; deoarece aici se află unul dintre momentele importante de trecere de la înțelegerea preponderent intuitivă, de observare a faptelor matematice în unele realizări concrete ale lor, la înțelegerea preponderent rațională, în care validarea unui enunț face de obicei obiectul unei teoreme. Este deci o bună ocazie de a observa cum „intră în scenă" teorema și cum se articulează ea cu observarea, intuiția, desenul. Partea întîi, intitulată „Cele mai simple figuri geometrice", pune accentul pe desen și pe observație. Toate noțiunile introduse aici, toate considerațiile dezvoltate au un suport vizual. Desigur, componenta logică nu este absentă, dar nici nu apare în prim plan. În schimb, partea a doua a manualului este intitulată *Geometria bazată pe judecată (raționament)* și ne avertizează de la început că „De acum încolo vom folosi în stabilirea de noi proprietăți ale figurilor geometrice (plane) numai judecata (raționamentul)". Consecvent cu promisiunea făcută, manualul trece imediat la formularea și demonstrarea primei teoreme: „Dacă într-un triunghi ABC în care $AB \equiv AC$ ducem bisectoarea unghiului A și considerăm punctul ei de intersecție M cu latura BC, atunci M este mijlocul segmentului BC". Altfel spus, într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului format de laturile egale este și mediană a bazei.

Cum învățăm această teoremă? Aici sînt mai multe răspunsuri posibile, mai multe atitudini, în funcție de ceea ce așteptăm din partea unui text matematic, de modul în care înțelegem rostul matematicii. Vom discuta în cele ce urmează două astfel de atitudini, foarte diferite între ele. Rămîne apoi să discutăm care dintre ele este mai bună.

Prima atitudine. Noțiunile care intervin în enunț sînt cele de unghi, triunghi și bisectoare. Vom revedea deci

definițiile date acestor noțiuni în partea întîi a manualului. Deoarece demonstrația începe cu considerarea unui desen în care se reprezintă triunghiul în cauză și toate punctele și segmentele considerate, vom urmări pe acest desen ipoteza și concluzia teoremei. Pe de o parte, congruența unor laturi ($AB \equiv AC$) și a unor unghiuri (cele cu vîrful în A), pe de altă parte, congruenta $BM \equiv CM$. Demonstrația din manual se prevalează de cazul 1 de congruență a triunghiurilor, pentru a stabili congruența triunghiurilor BAM și CAM. Verificăm că, într-adevăr, cazul 1 (prezentat la p. 29 din manual) se aplică aici, deoarece este vorba de două triunghiuri care au două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv congruente. (Să observăm totuși că în enunțul cazului 1, p. 29, există o greșeală de tipar: congruența $AC \equiv A'C'$ trebuie înlocuită cu $BC \equiv B'C'$). Rezultă, conform celor afirmate în manual, că triunghiurile BAM și CAM sînt congruente; deci, din nou conform manualului, laturile BM și MC sînt și ele congruente (ca opuse unor unghiuri congruente).

Am verificat astfel că demonstrația este corectă, deci că teorema 1 este adevărată.

A doua atitudine. Deoarece sîntem avertizați din primele rînduri ale introducerii (p. 31 a manualului) că „Punctele principale de plecare ale judecăților ce le vom face vor fi cele trei cazuri de congruență ale triunghiurilor," este natural să ne așteptăm ca teoremele care urmează să fie consecințe ale acestor cazuri de congruență. Problema este de a stabili care dintre cele trei cazuri se pretează a fi folosite aici. Să pornim de la ceea ce se cere: stabilirea relației $BM \equiv CM$. Știind că vom folosi unul dintre cazurile de congruență a triunghiurilor, căutăm să privim segmentele BM și CM ca laturi ale unor triunghiuri a căror congruență ar putea rezulta din ipoteze. Aceste triunghiuri se impun fără ambiguitate: BAM și MAC. Însă $AB \equiv AC$ (prin ipoteză), iar AM este, prin construcție, o latură comună celor două triunghiuri. Interpretînd mai departe ipotezele, constatăm că unghiul BAM este congruent cu unghiul MAC. Ne aflăm în condițiile cazului întîi de congruență a două triunghiuri, deci $BM \equiv MC$, deoarece BM și MC se opun la unghiuri congruente; teorema 1 este demonstrată.

Să comparăm acum cele două atitudini. Prima atitudine apare, la prima vedere, ca aceea a unui cititor conştiincios, care se supune în mod disciplinat indicaţiilor textului. Fiecare folosire a unui termen este însoţită de împrospătarea definiţiei termenului respectiv (în afară de cazul în care această definiţie ne-a devenit familiară). Fiecare afirmaţie este verificată. Ori de cîte ori se foloseşte un rezultat anterior, ne întoarcem la rezultatul respectiv, pentru a fi siguri că nu-l denaturăm; în cazul nostru, este vorba de cazul întîi de congruenţă a triunghiurilor.

Fără îndoială, o atare atitudine îşi are aspectele ei pozitive. Este vorba în primul rînd de respectul pentru cuvîntul folosit şi pentru argumentul avansat. Cititorul vrea să se asigure că fiecare termen este utilizat în mod consecvent, în conformitate cu definiţia sa iniţială, şi că fiecare verigă a raţionamentului rezistă controlului. Faţă de numeroşi cititori care se mulţumesc să înveţe pe dinafară enunţul unei teoreme, fără măcar să se întrebe ce semnificaţie au cuvintele folosite şi cum anume se stabileşte teorema în cauză, cititorul pe care-l avem în vedere aici este considerabil mai serios, iar profitul său este considerabil mai mare.

Totuşi, la o examinare mai atentă, atitudinea cititorului nostru serios este departe de a fi cea mai bună. El se menţine mereu „în coada textului", nu foloseşte aproape deloc iniţiativa personală, nu are ambiţia de a descoperi ceva cu propriul său efort, contribuţia sa de imaginaţie este nulă. Este ca şi cum obiectele şi enunţurile matematice ar proveni din surse care nu suportă nici o discuţie, de exemplu de la o elită intelectuală cu care nu putem avea pretenţia să intrăm în competiţie, nouă rămînîndu-ne numai să beneficiem de aceste rezultate, căutînd să le înţelegem şi să ni le însuşim.

Altfel se întîmplă cu cea de a doua atitudine. Relativa pasivitate a primului cititor este înlocuită acum cu o atitudine mai activă, care are ambiţia de a găsi cu propriile-i puteri calea cea bună, care caută deci să anticipeze consideraţiile din manual, precedînd lectura lor cu încercarea de a ajunge singur la ele, pentru ca apoi, prin confruntare, să se evalueze reuşita. Într-adevăr, cel de al doilea cititor *anticipează* faptul că demonstraţia teoremei se va baza pe unul dintre cazurile de congruenţă a triunghiurilor şi *găseşte singur* faptul că, dintre cele trei cazuri, cel de care trebuie să se folosească este cazul întîi.

Putem imagina însă un cititor şi mai activ, căruia să-i propunem următoarea problemă: Dacă într-un triunghi ABC în care $AB \equiv AC$ ducem bisectoarea unghiului A şi considerăm punctul ei de intersecţie M cu latura BC, ce relaţie există între lungimile segmentelor BM şi MC? De această dată ne revine nouă să descoperim că cele două segmente sînt congruente. Relaţia de congruenţă apare aici ca una dintr-o infinitate de relaţii posibile între cele două segmente. În această privinţă, sugestia oferită de desen este esenţială. Apare astfel rolul important, decisiv al intuiţiei în matematică. Este vorba aici de aspectul vizual al problemei. Pe baza desenului, se naşte bănuiala că $BM \equiv MC$, devine deci firească încercarea de a insera cele două segmente în triunghiuri congruente; de aici mai departe, urmăm cea de a doua atitudine prezentată mai sus. Bănuiala generată de desen, oricît de puternică ar fi ea, nu poate înlocui demonstraţia, deoarece desenul se referă, inevitabil, la un triunghi isoscel particular, în timp ce demonstraţia are în vedere toate triunghiurile isoscele posibile (evident, o infinitate).

AVANTAJELE ATITUDINII ACTIVE

Este evident că a fi bun la matematică înseamnă a te orienta nu spre prima, ci spre a doua atitudine şi, dacă se poate, spre cea de a treia atitudine, pe care am prezentat-o la sfîrşitul paragrafului anterior. Desigur, nu putem nega faptul că oamenii nu se nasc la fel de dotaţi pentru matematică. Dar nu putem accepta ideea după care ereditatea este singura care decide receptivitatea noastră în această privinţă. Adoptînd o atitudine mai activă, ne mărim şansa de a înţelege şi îndrăgi matematica, de a face însuşirea ei cît mai agreabilă.

Vom pune în evidenţă avantajele atitudinii active printr-un nou exemplu. Să ne referim la teorema 2 (p. 34) din acelaşi manual de geometrie de clasa a VI-a. Enunţul ei este: „Într-un triunghi isoscel, unghiurile de la bază sînt congruente". Înainte de a citi demonstraţia din manual, să avem ambiţia de a o descoperi singuri. Trebuie însă să ţinem seamă de faptul că o teoremă admite, în general, mai multe demonstraţii. S-ar putea deci ca demonstraţia pe care o găsim (dacă reuşim să găsim una) să fie diferită de cea din manual; va fi cu atît mai interesant să le comparăm.

Este natural să pornim de la desen, dar în acelaşi timp să ne asigurăm că în raţionamentul nostru nu intervine nimic din ceea ce, aparţinînd triunghiului isoscel din figură, ar putea să nu aparţină *oricărui* alt triunghi isoscel. Fie A, B şi C vîrfurile triunghiului. Ipoteza că triunghiul este isoscel se exprimă prin relaţia $AB \equiv AC$. Concluzia că unghiurile din B şi din C sînt congruente este puternic sugerată de figură. Pentru confirmare, este natural să încercăm să deducem această congruenţă din congruenţa a două triunghiuri din care fac parte unghiurile în discuţie. Modul cel mai natural de a obţine aceste triunghiuri este de a folosi situaţia din teorema 1. Într-adevăr, considerînd bisectoarea unghiului din A şi notînd cu M punctul ei de intersecţie cu latura BC, obţinem triunghiurile ABM şi ACM. Latura AM este comună celor două triunghiuri. Laturile AB şi AC sînt prin ipoteză congruente. În ceea ce priveşte laturile BM şi MC, ele sînt congruente în baza teoremei 1. Rezultă că cele două triunghiuri au laturile două cîte două congruente. Conform cazului al treilea (p. 30 din manual) de congruenţă a triunghiurilor, în cele două triunghiuri congruente, unghiurile care se opun unor laturi congruente sînt şi ele congruente. Deoarece unghiurile din B şi din C se opun laturii comune AM (deci unor laturi congruente care de această dată coincid), aceste unghiuri sînt congruente.

Să confruntăm acum demonstraţia de mai sus cu cea din manual. Diferenţa constă în faptul că în manual nu se foloseşte teorema 1, ci se recurge la cazul întîi de congruenţă a triunghiurilor, fiind vorba într-adevăr de două triunghiuri care au două laturi respectiv congruente ($AB \equiv AC$ şi $AM \equiv AM$) şi unghiurile din A congruente (datorită faptului că AM este bisectoare). S-a evitat astfel nevoia de a se recurge la congruenţa $BM \equiv MC$, inevitabilă atunci cînd se face apel la cazul al treilea de congruenţă a triunghiurilor. Putem deci spune că demonstraţia din manual este mai simplă şi mai directă decît cea dată mai sus, tocmai pentru că evită folosirea teoremei 1.

Iată deci cum atitudinea activă ne-a dat posibilitatea să privim comparativ două moduri diferite de a demonstra o aceeaşi teoremă, într-o anumită măsură să descoperim teorema.

A venit acum momentul să ne întrebăm cum se articulează componenta logică, reprezentată de definiții și teoreme, cu componenta intuitivă și observațională, concretizată în enunțuri acceptate fără demonstrație, în desene, în experiența pe care am acumulat-o etc. Rolul desenului în considerațiile de mai sus este destul de înșelător. Este adevărat că ne-am referit la el chiar în enunțul problemei și în formularea teoremelor, mai bine zis ne-am obișnuit ca, ori de cîte ori este vorba de un triunghi, să recurgem la o reprezentare vizuală, adică la un desen. De fapt, însă, folosirea, în enunț, a desenului, nu este esențială. Enunțul teoremelor 1 și 2 este perfect inteligibil și fără desen, dar simțim că situația devine în acest fel mai puțin comodă. Pentru a înțelege rolul fundamental al desenului și, implicit, al observației și al experienței noastre vizuale de fiecare zi, trebuie să ne referim nu atît la modul în care se demonstrează teoremele 1 și 2, cît la calea pe care aceste teoreme au fost bănuite, găsite, descoperite. Oricît ar putea să pară de curios, cele mai multe teoreme sînt descoperite mult înainte de a fi demonstrate. De altfel, cititorul unui manual de matematică s-ar putea întreba, este obligat să se întrebe (și tocmai prin faptul că simte această obligație se diferențiază atitudinea a doua de prima atitudine discutată mai sus), de ce tocmai *aceste* teoreme și nu *altele* sînt prezentate în manual; ar trebui, de asemenea, să se întrebe cum putem afla care enunțuri sînt teoreme, atîta vreme cît demonstrația este (cel puțin așa cum se prezintă lucrurile în mod obișnuit în cărțile de matematică) ulterioară enunțării teoremei. Dezlegarea acestui paradox nu poate fi decît una. O teoremă este mai întîi bănuită, se află deci în stadiu de ipoteză sau, cum se mai spune despre o ipoteză în care credem, de conjectură. Încercarea de a confirma această ipoteză poate să reușească (în acest caz ipoteza devine o teoremă), să eșueze (în acest caz statutul de ipoteză sau de conjectură se menține), să ducă la demonstrarea falsității ipotezei respective (în acest caz negația ei devine o teoremă) sau să conducă la o teoremă obținută printr-o anumită modificare a ipotezei inițiale. Dar imediat se pune întrebarea: Pe ce bază elaborăm ipotezele și conjecturile pe care le tatonăm, în vederea găsirii unor teoreme? Răspunsul nu este ușor de dat, iar psihologia activității matematice a propus, în această privință, multe explicații.

Este însă cert că un rol important îl au, în elaborarea ipotezelor, observația și experiența. Într-adevăr, să ne referim la teoremele 1 și 2 de mai sus. O simplă privire a unui triunghi isoscel este suficientă pentru a bănui cu toată puterea că unghiurile de la bază sînt egale și că bisectoarea celui de al treilea unghi determină pe bază segmente egale. Dar acesta este tocmai conținutul teoremelor în discuție. Este deci clar că *teoremele 1 și 2 sînt găsite cu ajutorul desenului. Înainte de a fi demonstrate, teoremele sînt văzute. Ochii înregistrează instantaneu ceea ce mintea elaborează în etape.* Ne dăm astfel seama că dacă desenul nu a avut un rol esențial în demonstrarea teoremelor 1 și 2, el nu putea fi eludat în găsirea acestor teoreme.

O bună pregătire matematică trebuie să mențină echilibrul necesar între aceste două aspecte ale matematicii, să valorifice atît componenta de observație și experiență, cît și pe cea rațională și deductivă. Fără prima, matematica devine seacă, rigoarea ei devine oarbă; fără a doua, nu ne putem ridica de la individual la general, nu facem decît să elaborăm ipoteze și conjecturi.

EXPUNEREA DEDUCTIVĂ ÎNCEPE CU SFÎRȘITUL

Dar intervenția observației și experienței noastre senzoriale nu se limitează la generarea bănuielii unor teoreme ca cele de mai sus. Demonstrația însăși se sprijină esențial pe experiența noastră anterioară; însă această experiență intervine de obicei de o manieră indirectă și de aceea trece de multe ori neobservată. Să vedem cum se petrec lucrurile în demonstrarea teoremelor 1 și 2. În ambele cazuri, demonstrația s-a bazat esențial pe unul sau alful dintre cele trei cazuri de congruență a triunghiurilor (p. 29—30), cazuri a căror prezentare este precedată de următoarea explicație: „Experiența cîștigată prin rezolvarea problemelor privind construcția de triunghiuri (p. 25—27) ne arată valabilitatea următoarelor afirmații, care se numesc «cazurile de congruență ale triunghiurilor» ". Cu alte cuvinte, cele trei cazuri de congruență nu fac obiectul unor teoreme, ci sînt expresia generalizată a unor situații practice particulare, privind construcția de triunghiuri, pe baza cunoașterii a trei dintre cele șase elemente (trei unghiuri și trei laturi) asociate unui triunghi. Lucrurile nu se opresc aici. Chiar noțiunile de bază cu care se lucrează în geometrie, cum ar fi cele de punct, dreaptă, unghi, triunghi, laturi etc. au,

dincolo de forma lor logică, o puternică bază intuitivă, ele ne-au devenit familiare prin observare directă a realității, mult înainte de a ne întîlni cu definiția lor logică.

Din cele de mai sus se desprinde un fapt foarte important pentru înțelegerea modului în care trebuie abordată matematica. Nu este nici un secol de cînd matematica a dobîndit organizarea deductivă care între timp a devenit de o largă răspîndire și în învățămînt, dar aproximativ 2 500 de ani înainte de această perioadă rigoarea de astăzi era numai un vag deziderat. Prima structură deductivă cunoscută în matematici, *Elementele* lui Euclid, a avut nevoie de 300 de ani de tatonări de la Tales la Euclid. Însă Geometria euclidiană, departe de a fi o structură pur logică, se sprijină puternic pe argumente intuitive, definiții obscure și demonstrații inadecvate. La Congresul internațional al matematicienilor din anul 1900, de la Paris, Henri Poincaré exclama: „Putem spune astăzi că am dobîndit rigoarea absolută". Astăzi știm că rigoarea absolută la care se referea Poincaré s-a dovedit a fi o himeră, că fiecare etapă istorică are standardele ei de rigoare, care ulterior cedează altora, mai exigente. Rămîne mereu valabil faptul că înțelegerea și găsirea sînt acte puternic impregnate de intuiție și că ele preced expunerea logică deductivă, care constituie fațada obișnuită a matematicii. Altfel spus, cărțile actuale de matematică adoptă de cele mai multe ori o ordine răsturnată față de cea reală, obligîndu-l pe cititor să pornească de la expunerea axiomatic-deductivă (care este, de fapt, faza finală a organizării unei discipline matematice) și să desprindă din ea sensurile și motivațiile care i-au stat la bază. Este ca și cum un text scris în mod normal, de la stînga la dreapta, ar trebui să fie identificat pe baza unei lecturi inverse, de la dreapta la stînga. O explicație a acestei situații s-ar afla în virtuțile sistematizatoare (permițînd o învățare metodică) ale prezentărilor axiomatic-deductive. Însă rigoarea și caracterul sistematic, oricît de importante ar fi — și nu se poate nega importanța lor — nu constituie esența matematicii, ci numai igiena ei. Matematica este o activitate creatoare, confruntată cu rezolvarea unor probleme. De la aceste probleme trebuie pornit, iar pentru rezolvarea lor trebuie puse în joc facultăți dintre cele mai variate: inițiativă, invenție, intuiție, analogii îndrăznețe. Față de nivelul de rigoare atins astăzi, după ce metodele de demonstrație au fost examinate în toate detaliile și se cunosc dificultățile pe care le comportă fiecare metodă, putem spune că prezentările axiomatic-deductive, sub forma unor sisteme formale,

constituie un test prin care verificăm în ce măsură o soluție, un rezultat descoperite prin intuiție se dovedesc a fi într-adevăr corecte.

Aristotel observa că nimic nu se află în intelect care să nu fi fost mai întîi sesizat de simțurile noastre; nimic, în afară de intelectul însuși, adăuga mai tîrziu Leibniz. Înainte de a defini triunghiul ca un sistem de trei puncte necolineare împreună cu cele trei segmente de dreaptă care le unesc, două cîte două, am văzut mii de triunghiuri de substanțe, forme și culori dintre cele mai variate.

•

BUNI ÎN ȘCOALĂ, SLABI LA ADMITERE

De ce oare mulți elevi cu note mari la matematică, obișnuiți să li se spună, la școală și acasă, că sînt buni la matematică, au un randament slab la concursul de admitere în învățămîntul superior? De ce oare se întîmplă destul de frecvent să întîlnim studenți slabi la matematică, dar cu o bună „carte de vizită" școlară? Mă preocupă de multă vreme aceste întrebări, mai cu seamă că, lucrînd cu studenții anului întîi, particip în fiecare an la șocul trecerii de la liceu la facultate. Șocul nu-i privește numai pe cei evocați mai sus, ci pe cvasitotalitatea studenților din anul întîi. Mai precis, nu intră aici un număr relativ mic de studenți excepționali, care într-o anumită măsură cunosc, încă înainte de a deveni studenți ai anului întîi, materia care urmează să le fie predată.

Am discutat această problemă cu numeroși studenți de valori dintre cele mai diferite, am urmărit cu atenție „infracțiunile" pe care ei le comit în lucrările scrise și la examenul oral, am ascultat relatările colegilor care conduc orele de seminar. Am ajuns la concluzia că nu atît deplasarea accentului de la probleme la teorie îi pune pe studenți în dificultate, cît o insuficientă legătură între cele două „fețe ale monedei": teoria și practica matematică. Deci (în contrast cu ceea ce cred numeroși studenți), nu faptul că la facultate se predă mult mai multă teorie decît la liceu determină șocul studentului din anul întîi; șocul este provocat de insuficientul antrenament în a aborda problemele pe baza teoriei și în a sprijini teoria pe motivații practice.

Am mai avut prilejul de a ilustra consecințele acestei situații. Să ne amintim, de exemplu, de șirul (a_n) cu limită strict pozitivă, despre care se cerea (la un recent concurs de admitere în învățămîntul superior) să se arate că raportul

a_{n+1}/a_n converge la 1. Foarte puțini candidați au fost capabili să se refere explicit (valorificînd deci conștient și deliberat teoremele de Analiză matematică) la teoreme ca *Un subșir al unui șir convergent este convergent* sau *Dacă două șiruri* (a_n) *și* (b_n) *sînt convergente, iar limita șirului* (b_n) *este diferită de zero, atunci șirul* (a_n/b_n) *este convergent, iar limita sa este egală cu* $(\lim a_n)/(\lim b_n)$.

Ne propunem, în cele ce urmează, să discutăm alte situații caracteristice pentru fenomenul semnalat.

CONSTRUCȚIA AUXILIARĂ, MOMENT DE IMAGINAȚIE

Ne vom opri atenția asupra teoremei sinusurilor (a se vedea p. 22—23 din manualul de geometrie și trigonometrie pentru clasa a X-a, ediția 1983, autori A. Coța, E. Kürthy, E. F. Popa, M. Radó, M. Răduțiu, F. Vornicescu). După cum se știe, teorema afirmă că în orice triunghi ABC avem $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$, unde a, b și c sînt lungimile laturilor care se opun unghiurilor din A, B respectiv C. Demonstrația recurge la o construcție auxiliară obținută prin construirea unei paralele prin A la BC și a unei paralele prin C la AB, aceste paralele întîlnindu-se în punctul D. În stilul laconic al manualului, se constată că AD și BC au aceeași lungime a, iar unghiurile BAD și ABC sînt suplementare, deci că măsura unghiului BAD este $\pi - B$. Folosindu-se un desen (în care unghiurile din A și C ale triunghiului considerat sînt ascuțite, iar unghiul din B este obtuz) și alegîndu-se un sistem de coordonate cu originea în A, dreapta AB ca axă a absciselor (cu abscisă pozitivă pentru B), iar dreapta perpendiculară în A pe AB ca axă a ordonatelor (cu ordonată pozitivă pentru C), se recurge la formulele care dau transformarea coordonatelor carteziene în coordonate polare. Se obține astfel pentru ordonata lui C valoarea $b \sin A$, iar pentru ordonata lui D valoarea $a \sin(\pi - B) = a \sin B$. Însă punctele C și D au aceeași ordonată (fiind pe aceeași paralelă la axa absciselor), deci $b \sin A = a \sin B$. În mod analog se obține $a \sin C = c \sin A$ și teorema este demonstrată.

O lectură activă a acestei demonstrații, așa cum am preconizat-o în etapa anterioară a itinerarului nostru, ne obligă să ne punem o serie de întrebări care vor aduce în atenție unele rezultate anterioare destul de depărtate, învățate încă în clasa a VI-a. Mai exigenți, ne-am putea propune să procedăm ca și cum ar trebui să descoperim noi teorema. Însă,

pentru a urma linia demonstrației din manual, să ne întrebăm cu ce intenție s-au considerat paralele prin A și prin C. De altfel, în abordarea oricărei probleme de geometrie, momentul recurgerii la o construcție auxiliară este decisiv și trebuie să-i acordăm întreaga noastră atenție. Este momentul de solicitare supremă a imaginației și inițiativei personale. În același timp însă, construcția auxiliară trebuie considerată și ca o ipoteză, o tentativă a cărei reușită nu poate fi în general garantată. Din acest motiv, uneori trebuie să renunțăm la o anumită construcție auxiliară și s-o înlocuim cu alta. De fiecare dată însă cînd manualul ne pune în fața unei construcții auxiliare, trebuie să ne întrebăm ce intenție se află îndărătul ei; numai în acest fel, cele ce vor urma ne vor apărea naturale, ușor de înțeles, aproape că le vom putea anticipa. Construcția auxiliară poate fi interpretată ca o prognoză asupra dezvoltării ulterioare a demonstrației.

TEOREME VECHI, UTILIZĂRI NOI

Cu aceste precauții și avertismente, să ne întrebăm deci ce s-a urmărit prin construcția auxiliară menționată. Răspunsul nu este greu de dat. Punctele A, B, C și D formează un paralelogram, deoarece laturile opuse sînt paralele. Este deci clar că există intenția de a se valorifica unele teoreme relative la paralelogram. Dintr-odată, memoria noastră este pusă la încercare, deoarece aceste teoreme au fost învățate cu patru ani în urmă (ele figurează în manualul de geometrie de clasa a VI-a). Să le amintim, „în ordinea intrării lor în scenă", cum se spune despre personajele unui spectacol teatral (aici, „intrarea în scenă" trebuie interpretată ca intervenția lor în demonstrație; scena este deci demonstrația). Pentru a deduce că segmentele de dreaptă AD și BC au aceeași lungime, trebuie să facem apel la teorema 8, p. 55 din manualul de clasa a VI-a (ediția 1979): „Într-un paralelogram, laturile opuse sînt congruente și unghiurile opuse sînt congruente". Partea a doua a acestei teoreme ne permite să trecem la pasul următor al demonstrației care ne interesează; într-adevăr, din congruența unghiurilor opuse și din faptul că (teorema 7, p. 51 din manualul de clasa a VI-a), suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 2π, rezultă, ținînd seama de faptul că orice paralelogram este un patrulater convex, că două unghiuri alăturate ale unui paralelogram sînt suplementare. Deducem astfel că unghiurile BAD și ABC sînt suplementare, deci că măsura

unghiului *BAD* este diferența dintre π și măsura unghiului din *B*. Însă o teoremă de trigonometrie afirmă că două unghiuri suplementare au același sinus, deci sin $(\pi - B) = \sin B$. Egalitatea ordonatelor lui *C* și *D* conduce acum la relația care trebuie demonstrată.

Să mai observăm faptul că teoremele utilizate se bazează, la rîndul lor, pe alte teoreme. Astfel, teoremele relative la paralelogram se bazează pe teoremele (din clasa a VI-a) privind situația creată prin considerarea a două drepte paralele tăiate de o secantă. Reprezentarea coordonatelor carteziene cu ajutorul celor polare face și ea obiectul unei teoreme, care se bazează pe unele cunoștințe de geometrie (relative la cerc) și de trigonometrie. Tot mergînd înapoi, ajungem la rădăcinile matematicii. Firește, nu este necesar să parcurgem de fiecare dată acest itinerar invers, însă efectuarea, din cînd în cînd, a unui asemenea exercițiu este instructivă, reprezentînd și un mijloc de autocontrol al gradului de înțelegere pe care l-am atins. În ceea ce privește însă teoremele și conceptele care intervin *direct* în demonstrație, invocarea lor este obligatorie, fără de aceasta neobținîndu-se legitimarea pașilor succesivi ai demonstrației. Stilul laconic al manualului nu trebuie deci să ne înșele în ceea ce privește obligațiile noastre în învățarea unei teoreme. Textul din manual este ca o telegramă, o schiță ale cărei detalii trebuie completate de cititor.

DEMONSTRAȚIILE MATEMATICE, TEXTE DESCHISE

În acest fel putem explica și un alt fapt: cum ne educăm memoria pentru a putea actualiza oricînd este nevoie o anumită teoremă sau definiție anterioară? Așa cum în biologie funcția creează organul, și aici memoria se formează prin exercițiu. Dacă ne intră în reflex faptul că orice pas al unei demonstrații sau al unui calcul trebuie justificat, atunci în mod inevitabil sîntem solicitați să facem mereu apel la faptele anterioare, fapte care, chiar prin această invocare repetată a lor, se întipăresc de la sine în memoria noastră. Nu este deci vorba (așa cum de altfel am observat și cu altă ocazie) de o memorizare intenționată, ci de un act de memorie care se constituie ca un corolar al unei anumite atitudini față de procesul de demonstrație matematică. De altfel, o atare atitudine de exigență față de demonstrarea unei teoreme are o rezonanță în întregul nostru comportament intelectual, civic și moral, deoarece ne educă în sensul unei nevoi

adînci de a motiva, de a justifica actele și deciziile noastre, de a înlătura din comportamentul social arbitrarul și absurdul.

Desigur, geometria oferă un cîmp optim pentru o conduită ca cea de mai sus, deoarece aici granița dintre teorie și practică, dintre general și particular este foarte greu de trasat. Multe probleme de geometrie pot dobîndi statut de teoreme, după cum multe teoreme pot fi transferate la secțiunea de probleme. Însă tot ceea ce am observat relativ la teorema sinusurilor este, în esență, adevărat pentru orice alt domeniu al matematicii.

Un alt aspect important al problemei discutate aici este cel la care ne-am mai referit cu o altă ocazie: dependența de figură a considerațiilor noastre. Demonstrația din manualul de clasa a X-a, evocată aici, se sprijină pe un desen în care triunghiul ABC are unghiuri ascuțite în A și C și un unghi obtuz în B. Noi, cititorii manualului, sîntem obligați să controlăm ce se întîmplă atunci cînd unghiul din B este drept și atunci cînd toate unghiurile triunghiului ABC sînt ascuțite. Mai rămîne valabilă teorema în aceste condiții? În cazul afirmativ, mai rămîne valabilă demonstrația dată? Dacă răspunsul la ultima întrebare este negativ, ce modificări trebuie introduse pentru a „salva" demonstrația? O examinare atentă a acestor chestiuni arată că teorema este valabilă așa cum a fost enunțată, adică în cazul general al unui triunghi oarecare, dar anumite modificări de detaliu trebuie luate în considerare în demonstrație. Constatăm astfel din nou că demonstrațiile matematice se constituie ca texte deschise, în care contribuția cititorului este hotărîtoare (să observăm că tot așa se întîmplă și la lectura unui roman, unde cititorul prelungește cu imaginația sa sugestiile textului).

GÎNDIRE MATEMATICĂ FĂRĂ... MATEMATICĂ

Este condiționată gîndirea matematică de folosirea unor cunoștințe de matematică, a unor noțiuni, teoreme, calcule matematice? Răspunsul este negativ, deși în cele mai multe cazuri un raționament matematic de o carecare complexitate nu poate evita folosirea limbajului matematic și a unor cunoștințe de matematică. S-ar putea scrie o întreagă carte despre manifestările gîndirii matematice în viața de fiecare zi, în activități extramatematice. De multe ori, această gîndire matematică netehnică se constituie ca o fază preliminară față de pătrunderea matematicii într-o anumită

disciplină. Întregi curente de gîndire, care au influențat decisiv numeroase domenii de cercetare și de creație, sînt puternic impregnate de o gîndire matematică crudă, care parcă invită, provoacă, stimulează un proces de matematizare. Un exemplu tipic în acest sens este gîndirea structurală, care a jucat un rol esențial în crearea lingvisticii matematice, a psihologiei matematice, a biologiei matematice, a sociologiei matematice. În cartea (pe care am publicat-o în colaborare) *Introducere în lingvistica matematică* (Editura Științifică, 1966) am descris pe larg modul în care gîndirea structurală s-a manifestat în lingvistică sub forma unei anticamere a matematizării.

Dar lucrurile nu se opresc la domeniile științei. Cercetări numeroase au arătat că și în creația artistică apar aspecte esențiale ale gîndirii matematice. Constatînd acest fapt, un mare gravor olandez, M. C. Escher, s-a asociat cu un mare geometru, H. Coxeter, pentru a-și gîndi mai bine lucrările. Într-o carte monumentală (Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*, Basic Books, New York, 1979), este urmărit în detaliu modul în care apare în arta fugii a lui J. S. Bach, în *Alice în țara minunilor* de scriitorul-matematician Lewis Carroll și în numeroase lucrări ale lui M. C. Escher gîndirea recursivă și autoreferențială din logica matematică modernă, cu specială referință la rezultatele lui Kurt Gödel.

Există deci o gîndire matematică naturală, neînsoțită de jargonul pe care-l întîlnim în mod obișnuit în matematică, o gîndire nu totdeauna conștientizată sub aspectul caracterului ei matematic. Este regretabil că aceste manifestări indirecte ale gîndirii matematice nu au fost urmărite mai sistematic și aduse în atenție. În activitatea economică, industrială, de organizare a producției, în conducerea diferitelor instituții, în transporturi și telecomunicații, în învățămînt și în cultură abundă situații în care spiritul metodic și ordonator al gîndirii matematice își poate arăta eficiența, dar nu totdeauna se găsește cineva care să-l traducă în fapt.

MATEMATICĂ ȘI ȘAH

Vom da cîteva exemple de probleme și situații fără aparență matematică, dar care sînt strîns legate de modul de a vedea al matematicii.

Un prim exemplu se referă la jocul de șah. Despre legătura dintre matematică și șah s-a vorbit mult. Prezența

masivă a raționamentului deductiv în fiecare dintre aceste activități este prea vizibilă pentru a mai trebui să fie demonstrată. Matematicienii au căutat să-și ia totuși distanța, accentuînd unele deosebiri esențiale dintre cele două activități. (Am discutat această chestiune în cîteva articole din „Viața studențească" din anul 1980). Pe de altă parte, șahiștii au subliniat și ei virtuțile gîndirii șahiste. „De ce șah? Fiindcă are o logică pe care o consider mai interesantă decît cea a matematicii. Aceasta este aridă, în schimb prin șah provoci la dialog o inteligență, o inviți la o întrecere sportivă care este altceva decît lupta. Șahul îți dă posibilitatea să gîndești abstract, imaginîndu-ți totodată noi forme și combinații geometrice", declară profesorul Dolphi Drimer într-un dialog cu Aura Matei Săvulescu *(Viața studențească*, nr. 17(1041), 24 aprilie 1985). Evitînd aici o polemică pe această chestiune, să considerăm o situație simplă legată de jocul de șah. Nu vom cere cititorului să fie un as al șahului; pentru cele ce urmează este suficient ca el să cunoască regulamentul jocului de șah, în primul rînd regulile de folosire a pieselor. Vom introduce, în acest regulament, o singură modificare: permisiunea ca, la deschiderea jocului, atît albul cît și negrul să poată efectua cîte două mutări consecutive (urmînd ca, după aceasta, să se intre în normal). În aceste condiții se cere să se arate că negrul nu are o strategie de cîștig, cu alte cuvinte, nu există o strategie care să asigure negrului victoria, independent de modul în care joacă albul.

S-ar părea că această problemă ne pune în fața unor chestiuni complicate de teorie șahistă, teorie pe care, fără îndoială, puțini cititori o cunosc. Nici n-ar fi rezonabil ca, într-o discuție despre gîndirea matematică, să presupunem din partea cititorilor cunoașterea profundă a unor chestiuni extramatematice. Consecvenți în promisiunea făcută anterior, vom arăta că rezolvarea problemei enunțate se obține rapid, fără a folosi altceva decît regulile jocului de șah.

Într-adevăr, să presupunem, prin reducere la absurd, că jucătorul cu piesele negre are o strategie de cîștig. Vom arăta că această presupunere conduce la o contradicție. Este suficient să observăm că albul poate alege în așa fel primele două mutări, încît ele să se neutralizeze reciproc. Această situație se poate realiza, la deschidere, într-un singur fel: mutînd mai întîi un cal, apoi mutînd același cal înapoi la locul său inițial. În acest fel, cînd îi vine rîndul să facă primele două mutări, negrul se află în situația inițială a albului, albul preluînd acum rolul negrului, deci avînd, conform ipotezei raționamentului prin reducere la absurd, o strate-

gie de cîştig. Rezultă că atît albul cît şi negrul au o strategie de cîştig, ceea ce este absurd, fiind în contradicţie cu regulamentul jocului de şah. Rezultă că presupunerea că negrul ar avea o strategie de cîştig este falsă.

După cum se vede, ideea centrală a demonstraţiei este observaţia posibilităţii efectuării de la început a două mutări care se anihilează reciproc. Această idee decurge oarecum natural din enunţ; într-adevăr, derogarea faţă de regulile clasice ale jocului de şah ne avertizează că cele două mutări iniţiale consecutive ale albului urmează să joace un rol special şi, deoarece dilema se referă la existenţa unei strategii de victorie a negrului, este natural să ne întrebăm dacă nu cumva albul, printr-o manevră adecvată, nu ar putea prelua rolul negrului. Ajungem astfel la cele două mutări ale calului.

Ce este matematic în procedarea de mai sus? În primul rînd chiar raţionamentul prin reducere la absurd, raţionament ingenios aici, prin inversarea de roluri între alb şi negru; apoi raţionamentul de natură combinatorie, în care ideea dublei mutări a calului aminteşte de operaţiile matematice opuse, care aplicate succesiv reproduc rezultatul iniţial (adunarea cu scăderea, exponenţierea şi logaritmarea etc.). Dar, poate că înainte de toate trebuie să apreciem simplitatea şi eleganţa raţionamentului, absenţa oricărui element neesenţial. Luciditatea şi claritatea sînt atribute esenţiale — chiar dacă nu caracteristice — ale gîndirii matematice.

GLUMA LUI MOIŞIL

Să considerăm acum un alt exemplu, de altă natură. Este vorba de o glumă atribuită unuia dintre marii matematicieni români din trecutul apropiat, Gr. C. Moisil. Se spune că într-o zi de toamnă, profesorul Moisil se afla cu un prieten într-o mustărie. Tocmai golise paharul de must şi ospătarul se grăbi să i-l umple pe al doilea. — Nu ţi se pare prea mult? N-ar fi bine să renunţi la al doilea pahar? i se adresă prietenul. — N-ar fi cazul, spuse Moisil. Orice om are dreptul la un pahar de must. Însă cînd bei un pahar, devii alt om.

O persoană care asistase la această scenă, i-a cerut profesorului să explice răspunsul său, după care a conchis: „Înţeleg, puteţi bea două pahare în loc de unul!" Această persoană, de altfel foarte distinsă, a făcut astfel dovada unei gîndiri

total refractare raționamentului matematic. Într-adevăr, să notăm cu $P(0)$ persoana lui Gr. C. Moisil înainte de consumarea primului pahar de must. După consumare, profesorul a devenit „un alt om", deci o altă persoană, fie ea $P(1)$, care ca orice om, are și ea dreptul la un pahar de must, după a cărui consumare devine o altă persoană $P(2)$ ș.a.m.d. După al $n-2$-lea pahar persoana $P(n-3)$ devine la rîndul ei o altă persoană, fie ea $P(n-2)$, care revendică și ea un pahar de must, transformîndu-se astfel într-o nouă persoană, $P(n-1)$. Lucrurile continuă în acest fel la nesfîrșit.

Constatăm deci că gluma lui Moisil are următoarea structură: 1. Există un om care bea un pahar de must. 2. Dacă un om bea un pahar de must, atunci el se transformă într-un alt om. 3. Orice om are dreptul la un pahar de must.

Ne aflăm în fața unui șir. Afirmația 1 introduce primul termen al șirului; iar afirmațiile 2 și 3 arată cum se obține termenul de rang $n+1$ atunci cînd se cunoaște termenul de rang n. Este exact situația în care principiul inducției complete ne asigură că sînt definiți toți termenii șirului.

Prin regula a doua de mai sus, gluma lui Moisil capătă o cu totul altă structură decît raționamentul din paragraful precedent, relativ la jocul de șah. Acolo era vorba de o *gîndire combinatorie finită*, în timp ce aici ne aflăm în fața unui *proces cu o infinitate de etape*, care are la bază o *gîndire generativă*, pe baza unei *reguli aplicabile repetat în mod indefinit*. Putem spune că în primul caz raționamentul este de tipul care intervine de obicei în aritmetică și algebră, în timp ce în al doilea caz raționamentul ne amintește de un capitol al analizei matematice.

Iată cum două ramuri ale matematicii pot fi evocate nu prin conținutul lor, ci prin metoda de gîndire pe care o folosesc.

MATEMATICA LA LOTO

Un al treilea exemplu se va referi la loto. Să presupunem că trebuie aleasă o combinație de p numere dintre primele n numere naturale (evident, p este mai mic decît n). S-a observat că foarte mulți jucători țin să se asigure într-un fel oarecare că numerele pe care le aleg sînt cît mai „la întîmplare". Dar regulamentul jocului de loto prevede că dacă mai multe persoane au ales o aceeași combinație cîștigătoare, atunci cîștigul se împarte la numărul persoanelor respective. Calculul probabilităților nu te poate învăța cum să cîștigi la loterie, dar te ajută să evaluezi șansele de cîștig. Însă alături de

partea logică există și o parte psihologică, aceste două părți putîndu-se combina. Într-adevăr, mai sus am făcut două constatări. Una logică: atunci cînd numărul celor care aleg o aceeași combinație crește, cîștigul posibil pentru fiecare dintre jucătorii care au ales această combinație descrește. Apoi, o constatare psihologică: cei mai mulți se orientează spre combinații care să li se pară cît mai întîmplătoare, în sensul că nu prezintă nici o regularitate aparentă. (Unii aleg combinații legate de anumite date personale, dar regularitatea care ar putea apărea aici este sesizată numai de jucătorul în cauză). Ce rezultă de aici? Că o combinație de o regularitate frapantă, ca 1, 2, 3, a cărei probabilitate de a fi cîștigătoare este exact aceeași cu a oricărei alte combinații de trei numere, oferă totuși avantajul că, în cazul cîștigător, există și probabilitatea mare de împărțire a cîștigului la un număr relativ mai mic de persoane decît în cazul altor combinații.

Discuția însă nu se încheie aici. Este natural să ne întrebăm cît de mulți ar putea fi cei care raționează ca mai sus, combinînd logicul cu psihologicul. Dacă aceștia sînt foarte numeroși, atunci întregul raționament este dat peste cap, deoarece el a fost efectuat în ipoteza tacită că aproape nici unul dintre jucători nu mai face o evaluare de acest fel. Ajungem astfel la aspectul sociologic al problemei și nu știm să se fi întreprins anchete sociologice printre jucătorii la loterie. S-ar putea întîmpla și un alt fapt: dacă avem impresia că foarte mulți jucători cred că numeroși jucători realizează avantajul unor combinații de tipul 1, 2, 3, deci că în ultimă instanță evită combinații de acest tip, tocmai acest fapt ne-ar putea determina să alegem o combinație de acest tip. Supozițiile pot continua astfel la nesfîrșit, fiecare oprindu-se acolo unde intuiția sa logică, psihologică și sociologică îl conduce. Dar nimeni nu poate merge la sigur în chestiuni atît de delicate.

PATRU ASPECTE ALE GÎNDIRII MATEMATICE

În urmă cu vreo 25 de ani a apărut în traducere românească o lucrare colectivă în trei volume, *Matematica. Conținutul, metodele și importanța ei* (Editura Științifică, 1959—1961), al cărei original fusese publicat la Moscova în 1956. În articolul care deschide această prezentare a matematicii, A. D. Aleksandrov (care împreună cu A. N. Kolmogorov și M. A. Lavrentiev editează lucrarea) indică următoarele patru caracteristici ale matematicii: Procese de abstractizare, de

diferite niveluri de abstracție; Precizie și rigoare logică; Relații cantitative; Cîmp larg de aplicații. Nu trebuie să înțelegem că în orice fapt matematic sînt prezente toate aceste patru aspecte. Primele două aspecte au un caracter mu't mai general decît celelalte două. Un anumit grad de abstractizare, precizie și rigoare logică este prezent în toate exemplele de mai sus; în schimb, relațiile cantitative sînt aproape absente din exemplul privind șahul și nu sînt de primă importanță în gluma matematică a lui Moisil. În ceea ce privește cîmpul larg de aplicații, acesta se manifestă nu la nivelul fiecărui fapt particular în parte, ci la nivelul conceptelor, metodelor, teoremelor și, mai cu seamă, al teoriilor.

Natura abstractă a matematicii este vizibilă chiar în modul de introducere a noțiunilor ei de bază. Ce înseamnă numărul 3? El este rezultatul unui dublu proces de abstractizare, unul referindu-se la *natura* obiectelor, altul la *ordinea* lor. Ce este comun tuturor mulțimilor de obiecte asociate unui același număr natural? Faptul că între două mulțimi oarecare de acest fel există o corespondență bijectivă, o corespondență care ne permite să considerăm că aceste mulțimi sînt la fel de numeroase, adică au același număr de elemente. Dincolo însă de această proprietate prin care mulțimile respective se aseamănă, ele pot să fie foarte diferite; obiectele unei mulțimi pot fi mere, ale alteia case sau cărți sau oameni, iar ordinea în care sînt considerate aceste obiecte nu influențează cu nimic numărul lor.

Putem deci spune că ideea de număr natural s-a cristalizat pe măsură ce oamenii au reușit să separe diferitele proprietăți ale obiectelor unei mulțimi, neluînd în considerare decît una dintre aceste proprietăți. Dar, așa cum un copil nu poate efectua de la început această separare, ci abia cînd ajunge la adolescență, specia umană a avut și ea nevoie de o evoluție îndelungată pentru a realiza această performanță. Multă vreme, numerele au trăit o fază intermediară, în care nu erau încă desprinse complet de natura obiectelor. Astfel, la tribul indian de vînători abiponi din Argentina, trib pe cale de dispariție, numărul 4 semnifică degetele struțului, 5 — degetele mîinii, 10 — degetele ambelor mîini (M. Dobritzer, *Geschichte der Abiponer*, Viena, 1884). În general, la triburile care se află pe o treaptă inferioară a dezvoltării capacitatea de abstractizare și generalizare este foarte limitată; așa cum nu există încă numere naturale complet separate de concretețea obiectelor, nu există nici noțiuni generale (de exemplu, aceea de animal). Multă vreme, nu se foloseau

decît numerele 1 și 2 (eventual și 3); în această stare embrionară, tot ceea ce depășea pe 2 sau pe 3 însemna pur și simplu *mult*. Este interesant să observăm că această evoluție a numerelor naturale la omul primitiv prezintă o anumită analogie cu evoluția reprezentării infinitului în matematica modernă. Exact cum, într-o epocă îndepărtată, singura distincție numerică operată de oameni era aceea dintre unitate și multiplicitate, în secolul trecut, pînă la apariția și dezvoltarea teoriei mulțimilor (în special a teoriei numerelor cardinale transfinite), în matematică se opera (încă neriguros) distincția dintre finit și infinit, dar toate mulțimile infinite erau considerate la fel de bogate, nedispunîndu-se încă de nici o posibilitate de introducere a unei numărători în domeniul infinitului, deci de ierarhizare a mulțimilor infinite după bogăția lor. Abia prin G. Cantor și R. Dedekind s-a cristalizat faptul că există o numărătoare transfinită, de tipul numărătorii efectuate asupra mulțimilor finite, cu ajutorul numerelor naturale.

ABSTRACTUL NU E UN LUCRU DE RUȘINE

Multe detalii în ceea ce privește formarea ideii de număr natural pot fi găsite în cărțile de istorie a matematicii (a se vedea, de exemplu, E. Kolman, *Istoria matematicii în Antichitate*, Editura Științifică, 1963). Procese asemănătoare de abstracție au condus la ideea de funcție, la aceea de triunghi, de poligon convex, de polinom, de ecuație algebrică, de grup sau corp algebric. Nu este greu de văzut că, în toate aceste exemple, procesul de abstractizare este legat de considerarea unor relații de echivalență. Într-adevăr, ce înseamnă a face abstracție de o anumită trăsătură a unor obiecte? Înseamnă a considera echivalente două obiecte care sau nu diferă prin nimic, sau diferă numai prin această trăsătură. Cu alte cuvinte, trăsătura respectivă devine nerelevantă. Un proces multiplu de abstracție este acela în care mai multe trăsături sînt considerate nerelevante (tocmai de acest tip este procesul care conduce la numere naturale; aici se face abstracție de un mare număr de trăsături: substanță, culoare, formă, grosime, ordine etc.).

Există o ierarhie a gradelor de abstractizare, corespunzînd unei îmbogățiri succesive a mulțimii de trăsături care sînt considerate nerelevante. De exemplu, conceptele de triunghi, poligon convex, poligon definesc, în ordine crescătoare, trei grade de abstracție. După cum am văzut cu alte

ocazii, raționamentele efectuate cu ajutorul unui desen sînt confruntate cu dificultatea de a face abstracție de particularitățile figurii (pentru a da raționamentului valoarea de generalitate de care are el nevoie) și, în același timp, de a exploata intuițiile și sugestiile a ceea ce poate fi sesizat pe cale vizuală. Matematicianul român Dan Barbilian, mare geometru și algebrist, a exprimat această duplicitate a desenului prin reflecția: *Desenul corupe raționamentul.*

Multe greșeli ale începătorilor sînt legate de lipsa de antrenament în efectuarea unor abstractizări. Dacă pînă pe la vîrsta de 10 ani insuficienta capacitate de abstractizare și generalizare este explicabilă, începînd cu gimnaziul, situația se schimbă. Un copil de 6 ani confundă de multe ori o mulțime cu reprezentarea ei grafică, crezînd că odată cu schimbarea acestei reprezentări se schimbă mulțimea. La această vîrstă, putem crede că mulțimea vidă este... o gaură de canal. Mai tîrziu însă, exigențele sînt altele. Printre diferitele tipuri de antrenament cu procesele de abstractizare trebuie să considerăm și exercițiile care să ne obișnuiască să fim capabili să recunoaștem o noțiune, o formulă, o proprietate, o teoremă indiferent de notația folosită. Să nu devenim sclavii nici unei notații. Chiar dacă epsilon este litera grecească cu care notăm în mod tradițional un număr pozitiv arbitrar, iar x este notația tradițională pentru argumentul unei funcții, să fim capabili să recunoaștem aceste „personaje" și atunci cînd sînt „travestite" într-o altă notație. De multe ori, în vorbirea obișnuită, cuvîntul *abstract* este folosit în sens negativ, cu înțelesul de *neclar, plictisitor, ambiguu.* În matematică, abstractul nu e un lucru de rușine, el este o bună parte din rațiunea de a fi a matematicii, mediul ei natural, așa cum apa este pentru pești și văzduhul pentru păsările cerului.

LIMBAJUL MATEMATIC, UN BLOCAJ?

Într-o seară din ultima decadă a lunii octombrie 1985, Radiodifuziunea franceză a transmis o lungă discuție privind învățămîntul matematic în Franța. Din ansamblul de opinii și observații, aparținînd unor persoane cu o lungă experiență în domeniul școlii, și din întrebările venite din rîndul publicului, vom reține aici numai o mică parte. Informația care mi-a atras atenția cu deosebire a fost aceea după care 80% din elevii școlilor din Franța au dificultăți în înțelegerea matematicii. Asupra cauzelor care au condus la această

situație într-o țară cu tradiții dintre cele mai glorioase, atît în domeniul creației științifice, cît și în cel al învățămîntului, nu s-a putut cădea de acord. Au fost totuși prezentate unele opinii, dintre care reținem aici pe aceea care consideră că matematica prezintă un blocaj prin limbajul ei foarte diferit de cel uzual.

O întrebare apare naturală. Este limbajul matematic, în forma sa actuală, o consecință firească, inevitabilă a complexității gîndirii matematice sau apar în acest limbaj distorsiuni, anomalii care nu-și au justificare și care sabotează înțelegerea, asimilarea și progresul gîndirii matematice? Este greu de dat un răspuns simplu la această întrebare. Oricît de multe simboluri ar adăuga matematica, suplimentînd astfel literele alfabetului latin, gîndirea matematică se sprijină pe limba naturală, limbă care pentru noi este limba română. Gîndim matematica prin intermediul limbii noastre materne, chiar atunci cînd ne aflăm în fața unui text matematic redactat într-o limbă străină. De aici, importanța aspectului lingvistic într-o expunere matematică, importanța vocabularului și gramaticii. Nu este însă mai puțin adevărat că, în matematică în mod special, în știință în general, limba naturală, impregnată de impreciziunile și ezitările vorbirii curente, are nevoie de o baie de rigoare, de o reglementare mai atentă a folosirii diferitelor simboluri și expresii. În acest scop, recurgem la diferite proteze care prelungesc și întăresc capacitățile limbii naturale, întocmai cum ochelarii și microscopul prelungesc vederea, iar bastonul vine în ajutorul picioarelor.

CONVENȚIE ȘI TRADIȚIE ÎN NOTAȚIA MATEMATICĂ

În primul rînd, să observăm că literele alfabetului latin au în matematică o dublă funcție: ele sînt în egală măsură componente ale cuvintelor și simboluri de sine stătătoare, care desemnează obiecte matematice dintre cele mai variate. Modul în care se asociază simbolurile cu obiectele este pur convențional, dar s-au creat anumite obiceiuri pe care le respectăm, fără a le fetișiza. Astfel, literele de la începutul alfabetului desemnează constante, cele de la mijloc parametri, iar cele de la sfîrșit necunoscute sau variabile. Deoarece însă literele m și n desemnează de multe ori numere naturale, litera o se confundă cu zero, iar litera l de tipar se confundă cu cifra unu, aceste litere sînt uneori evitate. Apare de asemenea o diferențiere între literele mari și literele mici ale

alfabetului. Astfel, dacă este vorba de o mulțime și de elementele ei, se obișnuiește să se noteze mulțimea cu o literă mare *(A, B, M, X* etc.*)*, iar elementele ei cu litere mici. Un element generic se notează uneori cu x, un *anumit* element cu o literă de la începutul alfabetului. Dacă trebuie să considerăm și clase de mulțimi, recurgem fie la litere ronde sau caligrafice ($\mathcal{A}$ sau $\mathcal{A}$, de exemplu) fie la litere mari ale alfabetului grec (cum ar fi Γ = gama, Λ = lambda sau altele). Literele grecești intervin uneori în matematică, unele utilizări avînd deja o lungă tradiție. Astfel, litera grecească sigma mare Σ este folosită pentru scrierea condensată a sumelor. De exemplu, în loc să scriem $a_1 + a_2 + \ldots a_n$, putem scrie:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

și citim: sumă de a_i cînd i variază de la unu la n. Aici însă trebuie să atragem atenția asupra tendințelor recente de evitare, pe cît este posibil, a indicilor și exponenților și, în general, a formelor de etajare a expresiilor. Acest lucru este necesar, în primul rînd, din considerente de ordin tipografic, dar în același timp prezintă și un avantaj din punctul de vedere al redactării și urmăririi considerațiilor. Astfel suma de mai sus se poate liniariza în felul următor: $\Sigma(a_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n)$. Se observă că s-a realizat și o economie de spațiu. O liniarizare masivă este azi realizată de limbajele de programare la calculator.

Atunci cînd la o expresie sau o relație urmează să ne referim în continuare, este bine ca ea să fie codificată printr-un număr, o literă sau prin alt semn (de exemplu, o stea *). Se obișnuiește ca expresiile și relațiile codificate să fie scrise pe rînduri separate, pentru a le face mai vizibile. Semnul prin care se face codificarea se așază între paranteze.

O altă literă grecească cu o utilizare specializată este epsilon ε. Prin ea se desemnează în Analiza matematică un număr pozitiv arbitrar care intervine în descrierea fenomenului de convergență a unui șir sau a unei serii, de limită finită a unei funcții, de continuitate, derivabilitate sau integrabilitate. Se știe însă că un astfel de număr este interesant prin valorile sale mici, din vecinătăți tot mai apropiate ale lui zero. De aceea, epsilon a devenit în matematică un simbol al micimii. Cu această accepțiune, a pătruns în depozitul de metafore matematice: „un epsilon" înseamnă „un număr pozitiv arbitrar de mic". Împreună cu epsilon se folo-

sesc, în exprimarea fenomenelor de limită finită a unei funcții, de derivabilitate sau de integrabilitate, literele grecești δ (delta) sau η (eta) pentru a se desemna numărul pozitiv asociat lui epsilon și avînd proprietatea prevăzută în definiția pe care o avem în vedere. Alte litere grecești, ca π (pi) și φ (fi) s-au specializat în desemnarea unor numere celebre, primul reprezentînd raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său, iar al doilea exprimînd numărul de aur (egal cu $(1+\sqrt{5})/2$). În modul în care am scris numărul de aur se observă posibilitatea de a linearíza o fracție. Însă aceeași literă φ, ca și litera ψ (psi), se folosește și pentru desemnarea unor funcții. Notația preferată pentru o funcție rămîne însă litera f, iar dacă este nevoie să considerăm mai multe funcții recurgem la alte litere de la mijlocul alfabetului, ca g și h; numai atunci cînd și acestea sînt ocupate, recurgem la litere grecești.

CUM REZISTĂM LA SCHIMBAREA DE NOTAȚIE?

Toate aceste notații constituie obiceiuri, preferințe, nu și obligații. Este chiar un bun mijloc de a testa gradul de înțelegere a matematicii prin capacitatea de a face față unei schimbări de notație, cu alte cuvinte de a recunoaște obiectele și situațiile matematice familiare independent de notația folosită pentru a le exprima. De altfel, nu este nevoie să provocăm în mod artificial astfel de schimbări de notație; ele au loc de la sine. Fiecare disciplină, în funcție de contextul pe care-l creează, recurge la alte notații. Faptele de Analiză matematică revin în studiul geometriei (de exemplu, derivata este folosită pentru a exprima coeficientul unghiular al tangentei la o curbă) și în fizică (unde derivata desemnează viteza, accelerația, densitatea de repartiție a unei mase sau a unei sarcini electrice etc.), funcțiile derivate fiind mereu altele, iar derivata notîndu-se uneori cu ajutorul unui accent (f'), alteori cu notația diferențială a lui Leibniz (df/dx), alteori, ca în mecanică, recurgîndu-se la un punct așezat deasupra literei care desemnează o anumită funcție de timp. Lucrurile se întîmplă ca într-o expresie populară franceză: *C'est la même Jeannette, autrement coiffée* (Aceeași Jeannette, altfel coafată).

Putem propune pe loc un exercițiu în acest sens. Să presupunem că pentru orice $a > 0$ există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că din $|x - x_0| < \varepsilon$ rezultă $|f(x) - f(x_0)| < a$. Este pro-

prietatea de continuitate a lui f în x_0, unde ceea ce se nota de obicei cu ε a devenit a, iar ceea ce se nota cu η sau cu δ a devenit ε. Putem însă introduce o derogare mai puternică de la notația uzuală. Să presupunem că pentru orice $f > 0$ există $a > 0$ astfel încît din $| b - b_0 | < a$ rezultă $| u(b) - u(b_0) | < f$. Este vorba tot despre proprietatea de continuitate, f fiind în rol de ε, a în rolul lui δ, b în rolul lui x, b_0 în rolul lui x_0 iar u în rolul funcției.

Un bun antrenament în asimilarea faptelor matematice independent de o anumită notație este obiceiul, din păcate rar practicat, de a căuta să formulăm și în cuvinte ceea ce am exprimat simbolic. Astfel, proprietatea de continuitate a unei funcții într-un punct revine la faptul că variația funcției în punctul respectiv devine, în valoare absolută, oricît de mică dorim, de îndată ce variația argumentului este, în acel punct, suficient de mică. Teoremele de geometrie sînt de cele mai multe ori exprimate în acest fel (Într-un triunghi dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor; Într-un triunghi oarecare, înălțimile sînt concurente etc.). În schimb, la algebră și analiză ne-am obișnuit să fim sclavii notației folosite. Cîți elevi sînt obișnuiți să enunțe formula pătratului unui binom nu numai sub forma $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ci și sub forma: Pătratul unui binom se obține adunînd suma pătratelor termenilor binomului cu dublul produsului lor? La analiză lucrurile devin și mai anevoioase, datorită faptului că este vorba de procese. Dar chiar și noțiuni relativ simple, ca aceea de convergență a unui șir, pot prezenta dificultăți pentru cei neantrenați. Am întîlnit mulți elevi care nu sînt în stare să definească proprietatea de monotonie a unui șir decît definind separat monotonia crescătoare, apoi cea descrescătoare (prima fiind aceea în care nici un termen nu este superior termenului imediat următor, iar a doua definindu-se prin faptul că nici un termen al șirului nu este inferior termenului imediat următor). Putem însă defini direct proprietatea de monotonie a unui șir, fără a fi nevoiți să separăm cele două orientări posibile ale monotoniei: Un șir este monoton dacă, oricare ar fi rangul unui termen, diferența dintre acest termen al șirului și termenul imediat următor evită un același semn. Dacă semnul evitat este $+$, obținem monotonia crescătoare, iar dacă semnul evitat este $-$, obținem monotonia descrescătoare.

De ce este necesar să putem enunța orice definiție și orice teoremă atît în cuvinte cît și simbolic? Deoarece fiecare dintre cele două enunțuri are avantajele , dar și dezavantajele lui, enunțul în cuvinte fiind de obicei într-o situație complementară față de enunțul simbolic. Enunțul în cuvinte are avantajul de a se exprima în limbajul familiar pe care-l constituie limba naturală și de a pune în evidență semnificația ca atare pe care o avem în vedere, fără a mai introduce între faptul avut în vedere și exprimarea lui ecranul pe care-l constituie notația matematică atît de supusă arbitrarului și convenției. Enunțul în cuvinte se adresează deopotrivă logicii și intuiției, deoarece limba naturală își distribuie echilibrat atenția între aspectele raționale și cele intuitive. Însă față de aceste avantaje ale enunțului formulat în cuvinte nu putem escamota dezavantajele. În primul rînd enunțul în cuvinte tinde să devină din ce în ce mai lung, chiar pentru fapte matematice relativ simple. Am formulat mai sus în cuvinte regula de ridicare la pătrat a unui binom. Enunțul obținut a fost rezonabil ca lungime, deși mult mai lung decît corespondentul său simbolic. Dacă trecem la cubul unui binom, acest decalaj crește, iar formula binomului lui Newton pentru valoarea 4 a exponentului ne pune răbdarea la încercare dacă vrem s-o enunțăm în cuvinte. Apare astfel o diluare a limbajului care nu se împacă deloc cu concizia gîndirii matematice.

Mai este și un alt aspect. Am avut prilejul să discutăm despre una dintre cele mai importante proprietăți ale gîndirii matematice, faptul de a fi o gîndire în etape, în care fiecare etapă se bazează esențial pe etapele anterioare. Însă pentru a ne putea baza pe etapele anterioare este necesar ca rezultatele obținute în aceste etape să fie codificate de o manieră simplă, riguroasă și comodă, care să permită referirea fără dificultate la ele; altfel, după un oarecare număr de etape s-ar acumula atît de multe concepte și rezultate, încît nu le-am mai putea stăpîni și controla. Acest bagaj anterior trebuie organizat în așa fel încît să nu fie încălcate limitele atenției și memoriei umane și să nu se piardă baza intuitivă și empirică a faptelor. Realizarea acestui deziderat ar fi imposibilă fără a se recurge la notații și simboluri care să suplimenteze mijloacele obișnuite ale limbii naturale. În acest fel, are loc un proces de miniaturizare a expresiei matematice, așa cum tehnica modernă permite o miniaturizare în domeniul electronic, de exemplu. Prin notații simbolice adecvate, enunțurile matematice devin tot mai con-

cise, deci mai ușor de urmărit și manipulat, și tot mai riguroase, deoarece eliberează limbajul matematic de impreciziile și obscuritățile limbajului comun, folosit în mare măsură în mod spontan, fără o supraveghere deosebită. Este adevărat că prin aceasta limbajul matematic riscă să devină și tot mai uscat, adresîndu-se tot mai puțin intuiției și tot mai mult rațiunii. Apare riscul de a se pierde legătura cu baza empirică a matematicii, cu sursele ei reale. Există o ieșire din această dilemă?

Numeroși matematicieni sînt de părere că limbajul matematic trebuie să păstreze un echilibru între cuvinte și simboluri, între fraze și formule. Vocabularul matematic trebuie ales cu grijă, pentru ca el să facă, pe cît posibil, imagine, să ne ajute să înțelegem, prin chiar alegerea termenilor, și semnificația lor, care nu totdeauna este direct vizibilă. Să reflectăm puțin asupra unor termeni ca *limită, convergență, continuitate, derivată, integrală, primitivă*; nu există o legătură strînsă între semnificația lor matematică și aceea pe care ei o au în limbajul cotidian? Să reflectăm asupra multora dintre notațiile matematice. Semnul integralei rezultă dintr-o alungire a literei *S*, inițiala cuvîntului *sumă*. Funcția se notează de obicei cu inițiala *f* a acestui cuvînt, Integrala de la *a* la *b* a lui *f* are o expresie asemănătoare, ca structură, cu aceea a șumelor finite din care ea provine. Diferența a două mulțimi se notează (aproape) ca și diferența a două numere, iar produsul cartezian folosește nu întîmplător semnul operației de înmulțire.

Exemplele ar putea continua, dar îi lăsăm pe cititori s-o facă.

FICȚIUNEA MATEMATICĂ

Să încercăm să comparăm matematica cu alte științe, ca fizica, chimia, astronomia, zoologia sau botanica. Ceea ce frapează la acestea din urmă este faptul că fiecare dintre ele se ocupă de o parte a realității existente în jurul nostru, o realitate a cărei obiectivitate nu poate fi contestată, deoarece nimeni nu-și imaginează că fenomenele fizice sau chimice, astrele cerești, animalele și plantele de tipul celor care ne înconjoară n-ar fi existat și înaintea nașterii sale sau că nu vor exista și după dispariția sa. O întrebare firească urmează: au lucrurile de care se ocupă matematica o existență tot atît de clară ca a celor de care se ocupă celelalte științe enumerate mai sus?

Conform unei lungi tradiții, s-a spus că matematica se ocupă de numere și de forme geometrice. Să acceptăm, pentru moment, această descriere a obiectului matematicii, descriere mult depășită de matematica actuală. Au numerele și formele geometrice o existență la fel de incontestabilă ca și plantele botanistului? Este, de exemplu, numărul prim o realitate de același tip cu a unui elefant? Răspunsul este, evident, negativ. În faimoasele sale considerații privind această chestiune, Alfred Rényi *(A Socratic dialogue on mathematics*, Canadian Mathematical Bulletin, vol. 7, 1964, nr. 3, p. 441—462*)* îi pune față în față pe Socrate și pe Hipocrate. „Iată, scriu pe tablă numărul 37; îl vezi, îl poți atinge cu mîinile tale. Mai poți spune că nu există?" îl întreabă Socrate, la care Hipocrate răspunde că noi putem desena și un dragon cu șapte capete, fără ca aceasta să însemne că acest dragon există sau a existat vreodată. Socrate nu se dă învins și-i arată lui H. oile care pasc pe dealul din apropiere; dacă existența acestor oi este incontestabilă, nu este la fel de reală și existența numărului lor? În replică, H. îi atrage atenția lui S. că de numărul oilor se ocupă păstorul, nu matematicianul; acestuia din urmă îi revine numai o abstracție a ideii de număr, independentă de manifestările ei concrete. La fel în ceea ce privește forma geometrică a obiectelor, pe care matematicianul o separă de obiecte ca atare. Dar cum o separă? Este posibil să separăm forma unui vas de vasul la care ea se referă așa cum separăm o oaie, cu ajutorul unei mașini de tuns, de lîna care îmbracă trupul ei? Răspunsul este, evident, negativ. În al doilea caz este vorba de o separare materială, în primul de una conceptuală, ipotetică. De forma vaselor se ocupă și olarii, fără ca prin aceasta să devină matematicieni. Este deci clar că numerele și formele, ca obiect de studiu al matematicii, sînt lipsite de o existență tangibilă, ele apar ca rezultat al unor procese de abstractizare.

FICȚIUNEA ESTE MAI PRECISĂ DECÎT REALITATEA

După cele constatate mai sus, ne-am aștepta ca matematica să prezinte un dezavantaj față de științe ca zoologia, botanica sau medicina, din punctul de vedere al rigorii și certitudinii cunoștințelor pe care acestea ni le pun la dispoziție. Nu este oare mai sigură, mai demnă de încredere cunoașterea nemijlocită a copacului pe care-l văd în fața

casei mele, decît o abstracție ca aceea pe care o numim *număr* și care se obține printr-un efort cerebral foarte complex, pe care îl controlăm mai greu?

Concretețea lumii înconjurătoare se află într-o continuă fluctuație. Este bine știut că doi oameni nu-s niciodată identici, dar nici măcar două ouă nu pot fi pur identice. Nu rostim un cuvînt de două ori exact în același fel, nu privim de două ori exact în aceeași apă. În mod riguros, nici o existență concretă, individuală, nu este repetabilă. Pentru ca un fenomen sau un lucru să poată deveni obiect de cercetare științifică este necesar ca el să devină, din individual, categorial; este necesar să-i ignorăm unele particularități, aproximîndu-l cu o construcție mintală care reține unele aspecte esențiale ale tuturor obiectelor din aceeași clasă cu obiectul considerat. Această strategie este folosită în toate științele, dar în grade diferite. În gradul cel mai înalt, aceasta se întîmplă în matematică. Prin această aproximare a unei realități empirice cu ajutorul unei entități teoretice sacrificăm unele trăsături ale realității, cîștigînd în schimb în siguranța și rigoarea cunoștințelor pe care le dobîndim. Putem afirma de o manieră generală că știința tinde să devină a generalului mai mult decît a particularului, dar acest deziderat se realizează, în forma lui supremă, în matematică. Putem spune fără exagerare că matematica substituie entităților empirice anumite entități teoretice, dar asupra acestora din urmă obține rezultate mai precise, mai riguroase decît cele care se obțin cu privire la cele dintîi. Două persoane care vor măsura, independent una de alta, drumul de la București la Ploiești nu vor găsi niciodată exact același rezultat. În schimb, cunoașterea lungimii diagonalei pătratului se poate obține cu precizie, de îndată ce cunoaștem latura pătratului; este suficient să folosim teorema lui Pitagora. Nici numărul locuitorilor orașului București, într-o anumită zi, nu este ușor de determinat cu exactitate, deoarece chiar în timpul operației de numărare pot deceda unele persoane și se pot naște altele. Este mult mai ușor de numărat muchiile unui dodecaedru regulat, deoarece acesta are 12 fețe, fiecare față avînd 5 muchii, de unde rezultă un total de 60 de muchii; însă fiecare muchie delimitează două fețe ale dodecaedrului, deci este numărată de două ori. Numărul exact al muchiilor distincte ale dodecaedrului este deci egal cu 30.

Nu altfel se întîmplă lucrurile în domeniul ficţiunii literare. Literatura se află faţă de realitate într-o situaţie oarecum asemănătoare aceleia în care matematica se plasează în raport cu aspectele empirice ale lucrurilor. Se întîmplă de multe ori ca asupra culpabilităţii unei persoane aflate sub bănuiala de a fi comis o crimă să persiste o îndoială imposibil de înlăturat. Desigur, şi în literatură se întîmplă să persiste îndoiala asupra autorului unei crime, dacă scriitorul doreşte acest lucru. În general, însă, lucrurile stau altfel. Personajele literare sînt la fel de fictive ca şi conceptele matematice, dar tocmai pentru aceasta cunoştinţele noastre despre aceste personaje sînt mai sigure, mai demne de încredere. Sîntem noi siguri, după mii de ani, că Clitemnestra şi Agamemnon au existat în realitate? Nu sîntem siguri, dar nici nu este relevant acest lucru. Important este faptul că în trilogia lui Eschil există personaje cu aceste nume, iar în cadrul ficţiunii care ni se propune este cert faptul că eroina Clitemnestra se face vinovată de uciderea lui Agamemnon. Este deci mult mai greu să decizi asupra vinovăţiei unei femei în carne şi oase, decît a uneia fictive. Cunoştinţele noastre despre persoane reale sînt mai controversate decît cele privind personajele care apar într-o operă literară, deoarece acestea din urmă sînt construite după imaginaţia autorului îşi corespund unui proiect dinainte constituit. Nu altfel se întîmplă în matematică, unde totul are loc în cadrul unei convenţii care aparţine imaginaţiei noastre. *Noi* sîntem cei care alegem conceptele şi axiomele cu care lucrăm (a se vedea, de exemplu, geometria lui Euclid); impunînd acestora o anumită precizie şi rigoare, nu mai trebuie să ne mire că aceeaşi precizie şi aceeaşi rigoare o vor avea şi faptele (teoremele) obţinute pe baza lor.

Desigur, această analogie îşi are limitele ei, pe care nu le putem discuta aici. Modalitatea literară în care personajele se află la discreţia autorului corespunde unei reprezentări clasice a fenomenului literar, reprezentare care nu mai este azi singura posibilă. În ceea ce priveşte sentimentul de certitudine pe care ni-l oferă rezultatele matematicii, şi aici lucrurile s-au mai complicat în secolul nostru. S-a constatat, de exemplu, că dincolo de posibilitatea ca un enunţ să fie fals sau adevărat se conturează şi alte posibilităţi: el poate fi independent, nedecidabil etc. Vom avea prilejul să discutăm despre aceste lucruri. Dar analogia se prelungeşte şi în ceea

ce privește derogările de la descrierea de mai sus. Echivocurile, ambiguitățile unei opere de ficțiune (a se vedea surîsul Giocondei) trec mult dincolo de intențiile autorului, tot așa cum Zermelo și Fraenkel nu au putut bănui că sistemul de axiome pe care l-au propus pentru teoria mulțimilor va conduce la statutul de propoziție independentă (Gödel, Cohen) al axiomei alegerii. În partea ei de început, de fundamente, matematica rămîne în continuare controversată. Conceptul de mulțime trebuie să-l acceptăm ca o idee primitivă, dar acest fapt nu împiedică teoria mulțimilor de a se constitui la un nivel superior de rigoare, după cum nu este împiedicată în această privință nici de faptul că despre diferite sisteme de axiome ale teoriei mulțimilor nu știm dacă sînt sau nu necontradictorii.

Este deci natural să ne așteptăm ca entitățile produse de imaginația noastră (fie în literatură, fie în matematică) să se preteze la o cunoaștere mai precisă decît obiectele lumii reale, deoarece noi le proiectăm tocmai cu intenția de a le înzestra cu aceste calități. Aceste entități trebuie să realizeze un dublu record; pe de o parte să se depărteze de lumea reală pentru a putea fi mai precis cunoscute, pe de altă parte să se mențină în legătură cu această lume, pentru a avea în raport cu ea o anumită valoare de cunoaștere. Ele trebuie să fie metafore sau modele ale lumii reale.

LA CE FOLOSEȘTE MATEMATICA?

Ultimele rînduri ale paragrafului precedent ne dau o primă indicație în această privință. Libertatea imaginativă a matematicianului și a poetului a fost de multe ori confundată cu arbitrarul. Există o infinitate de moduri în care un matematician își poate alege noțiunile și axiomele cu care lucrează, tot așa cum infinită este și alegerea poetului în elaborarea ficțiunii sale. Dar și într-un caz și în celălalt, această infinitate se supune unor puternice restricții, datorită cărora opera de ficțiune care rezultă, oricît de personală ar fi, păstrează o puternică valoare comunicativă și inteligibilă.

Pluralitatea geometriilor și a logicilor nu se datorează libertății axiomatice, cum afirmă Constantin Noica *(Trei introduceri la devenirea întru ființă*, Editura Univers, București, 1984, p. 10*)*, ci numai se manifestă prin această libertate. Cauza pluralității se află în faptul că infinitul mare și infinitul mic au o altă geometrie decît universul direct perceptibil, iar logica cuantică, logica viului și logica multor

altor aspecte sistemice ale universului se sustrag de la logica binară aristotelică. Desigur, putem să născocim sisteme arbitrare de axiome, dar ele nu vor rezista dacă nu au o motivație convingătoare, după cum nici o operă de ficțiune literară nu se va impune dacă ea nu surprinde, fie cît de indirect, un anumit fond uman în care destui cititori să se regăsească. Modul în care ficțiunea matematică sau literară intră în legătură cu realul nu se lasă, în general, ușor explicitat, dar noi sesizăm de obicei rezultatul acestei legături. Nu este totdeauna vorba de o legătură simplistă, în cadrul căreia, pornindu-se de la un fenomen real, se abstrage o structură a sa. Multe universuri imaginare se dezvoltă în matematică în virtutea unor deziderate interne de coeziune și armonie a unei teorii, de dezvoltare a unei analogii etc., pentru ca mai tîrziu să se constate că aceste universuri elucidează fenomene importante ale lumii reale. Un caz tipic în această privință este Analiza Nonstandard propusă începînd cu anul 1960 de Abraham Robinson. Se știe că Leibniz introdusese așa-numitul *infinit mic*, definit ca o cantitate strict pozitivă inferioară lui $1/n$, oricare ar fi numărul natural n. În mulțimea numerelor reale, așa cum este ea conceptualizată începînd cu secolul al XIX-lea (a se vedea teoria lui Cauchy sau aceea a lui Dedekind) atare infiniți mici nu pot exista. De unde provine această imposibilitate? Din adoptarea axiomei lui Arhimede, după care oricare ar fi numerele strict pozitive a și b, există un număr natural n pentru care na întrece pe b. Nu este greu de văzut că negarea axiomei lui Arhimede conduce la existența infiniților mici ai lui Leibniz. Într-adevăr, prin negare se obține existența a două numere strict pozitive a și b astfel încît, oricare ar fi numărul natural n, numărul na să nu depășească pe b sau, în mod echivalent, numărul a/b să nu depășească pe $1/n$, oricare ar fi numărul natural n. Este clar că, în aceste condiții, numărul a/b este un infinit mic. A. Robinson arată că există corpuri bine ordonate care prelungesc corpul numerelor reale și în care axioma lui Arhimede nu este satisfăcută (de exemplu, corpul funcțiilor raționale cu coeficienți în R). Aceste corpuri dau naștere unor universuri care explică unele fenomene delicate, cum ar fi mecanismul de funcționare a economiilor de schimb. Fenomenul de stabilire a prețurilor într-o astfel de economie poate fi modelat cu ajutorul unui model nonstandard, în ipoteza că numărul participanților la economia considerată tinde la infinit. Se arată că, în aceste condiții, diferențele dintre opțiunile diverșilor participanți tind către un infinit mic.

În mod tradițional, deosebirea dintre știință și artă a fost considerată a fi echivalentă cu aceea dintre descoperire și invenție. A descoperi un obiect, un fenomen, o lege înseamnă a conștientiza existența sa în condițiile în care obiectul, fenomenul, legea preexistau momentului conștientizării. Cristofor Columb a descoperit America la 12 octombrie 1492, deoarece continentul respectiv exista și înainte de această dată. Louis Pasteur, în secolul al XIX-lea, pune în evidență existența bacteriilor, dar bacteriile existau în natură și înainte de Pasteur. François Jacob și Jacques Monod descoperă acidul nucleic mesajer, evident preexistent descoperirii lor. Isaac Newton descoperă legea atracției universale, lege care acționa și înainte ca Newton s-o pună în evidență. În schimb, *Iliada* este o invenție a lui Homer, *Coloana infinită* este o invenție a lui Brâncuși, iar *Rapsodia română* este o invenție a lui George Enescu, deoarece nici una dintre aceste opere nu exista înainte de creatorul ei. Să mai observăm că și în domeniul tehnicii creația se manifestă tot sub formă de invenții. Exemplele de mai sus pot da impresia că deosebirea dintre știință, pe de o parte, artă și tehnică, pe de altă parte, este relativ simplă. Problema este de fapt mult mai delicată și acest fapt a fost remarcat de numeroși cercetători care s-au ocupat de această problemă. Jacques Hadâmard *(The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover Publications, New York, 1954) observă că de multe ori este greu de stabilit granița dintre descoperire și invenție și că, în orice caz, ele se află în strînsă legătură. Este greu să despărțim invenția — de către Franklin — a paratrăsnetului de descoperirea — tot de către Franklin — a naturii electrice a tunetului. Tot așa, invenția barometrului este inseparabil legată de descoperirea comportamentului coloanei de mercur închise într-un tub (E. Torricelli). Lucrurile se complică și mai mult în știința mai recentă. Este constanta lui Planck o invenție sau o descoperire? se întreabă Jean Bernard *(Création poétique et création scientifique*, Bulletin de l'Académie Royale de Langue et de Littérature Française, vol. 58, 1980, no. 3—4, p. 250—257*)*. Iar în ceea ce privește filozofia, întrebîndu-l pe filozoful Constantin Noica ce este ea, invenție sau descoperire, am primit următorul răspuns: *Tertium datur*.

Matematicienii au ezitat totdeauna între aceste două posibilități, un exemplu simptomatic în această privință fiind logaritmul, despre care uneori se afirmă că a fost inventat de John Napier (Neper), alteori că a fost descoperit de acesta. În „Mic Dicționar Enciclopedic" (Editura Științifică și Enciclopedică, 1978, p. 1517) se spune că Napier este creatorul logaritmilor, ceea ce este, evident, echivalent cu a spune că Napier este inventatorul lor. Titlul cărții lui Hadamard, menționată mai sus, se referă de asemenea la invenție; dar acest mare matematician ne previne chiar din introducerea cărții sale că sub aspect psihologic nu vede nici o deosebire între invenție și descoperire, motiv pentru care își permite să le identifice.

Însă o discuție serioasă despre statutul conceptelor și rezultatelor matematicii din punctul de vedere al încadrării lor între invenții sau între descoperiri (sau la nici una dintre ele) trebuie să țină seama și de o altă versiune a acestor tipuri de creație. Avem în vedere distincția introdusă de Jean Bernard (loc. cit., p. 256—257) între creații care, o dată ratate, nu mai pot fi recuperate și creații care nu se pierd, ci numai se amînă. Moartea savantului este numai o întîrziere, crede Jean Bernard, în timp ce moartea poetului înseamnă moartea operei pe care nu a mai apucat s-o elaboreze. Tot ceea ce Évariste Galois ar mai fi creat în matematică dacă n-ar fi murit atît de tînăr, în duel, a fost sau va fi cu certitudine recuperat de alți matematicieni, crede Jean Bernard. În schimb, nimeni nu va mai ști vreodată cum ar fi arătat Simfonia a X-a a lui Franz Schubert. Jean Bernard, care a condus multă vreme Institutul de Cercetări asupra Leucemiei și Bolilor Sîngelui, se referă la descoperirea de către Jean Dausset a sistemului de incompatibilitate HLA, prin care a demonstrat caracterul unic, irepetabil al fiecărei ființe umane. Nu numai că fiecare om este diferit de toți ceilalți existenți (cu excepția gemenilor puri), dar nu pot exista, în trecut sau în viitor, doi oameni identici. Jean Bernard crede că acest caracter unic, irepetabil, îl au creațiile artistice, nu însă și cele științifice (nu ne spune ce crede despre cele tehnice și despre cele filozofice).

Mai întîi trebuie să observăm că definirea descoperirii drept conștientizare a unui obiect sau fapt preexistent nu este echivalentă cu definirea ei prin posibilitatea recuperării ulterioare a conștientizărilor ratate. Tot așa, definirea invenției drept creație a unui obiect care nu exista anterior nu este

echivalentă cu definirea ei prin caracterul irepetabil, prin imposibilitatea recuperării de către un alt creator a operei pe care un anumit creator nu a mai apucat s-o elaboreze. Să luăm, de exemplu, o teorie științifică, de tipul teoriei integralei, în forma propusă de Leibniz și Newton. Desigur, o teorie matematică permițînd trecerea de la o descriere locală la o descriere globală a unui fenomen ar fi apărut, *dar nu este deloc sigur că ar mai fi fost regăsită exact în forma Leibniz-Newton*, deoarece alegerea care se oferea aici era practic infinită. O situație similară o prezintă Analiza Nonstandard a lui Robinson, Teoria Relativității a lui Einstein. În schimb, o teoremă ca aceea a lui Euclid, afirmînd infinitatea mulțimii numerelor prime, ar fi fost sigur recuperată în ipoteza că Euclid ar fi ratat-o.

POINCARÉ, HADAMARD ȘI ESTETICA ȘTIINȚEI

Este matematicianul la fel de liber în alegerea obiectelor abstracte pe care le va studia ca și autorul unui roman sau al unei piese de teatru în alegerea personajelor ficțiunii sale? Este cert că și matematicianul și poetul se află în fața unei alegeri dintr-o infinitate de posibilități. Paul Valéry observa că în orice act de invenție intervin două tipuri de operații, combinări și alegeri, însă considera că genialitatea este mai degrabă rezultatul celor din urmă decît al celor dintîi. Nu alta era opinia lui Henri Poincaré, pentru care creația și invenția se bazează pe combinări și alegeri, accentul căzînd și la el pe discernămînt, pe alegere. Faptul că un matematician și un poet, amîndoi de primă mărime, văd în același fel procesul de creație, este deosebit de semnificativ pentru unitatea de structură a acestui proces.

Dar în ce constă criteriul de alegere? Este el conștientizat? Cum alege un matematician? Cum alege un poet? Dacă alegerea se face pe baza unor reguli, atunci — crede Poincaré — aceste reguli sînt fine și fragile, este aproape imposibil să le formulăm cu precizie; ele sînt mai degrabă simțite, intuite decît formulate explicit. Un rol esențial îl are aici viața emoțională, chiar dacă este vorba de creația matematică, aparent atît de rațională. Felul în care sînt simțite frumusețea matematică, armonia numerelor și formelor, eleganța geometrică este decisiv. Elementul afectiv este o componentă esențială a oricărei descoperiri sau invenții. Pentru Poincaré, alegerea care intervine într-un act de descoperire sau invenție științifică este guvernată de senti-

mentul frumuseții științifice. În același timp, Poincaré atribuie inconștientului un rol important în operația de alegere, rol subliniat și de Helmholtz, care mărturisește că niciodată nu i-a venit o idee fericită atunci cînd se afla la masa de lucru. Importanța momentului de iluminare este subliniată și în unele mărturii ale lui Mozart, Lamartine și Paul Valéry.

Se amendează astfel o veche prejudecată, după care matematica ține de logică așa cum poezia ține de emoție. Gîndirea matematică este de o mare varietate, există de fapt mai multe tipuri de gîndire matematică și este greu ca cineva să fie înzestrat cu toate aceste tipuri. Astfel, Poincaré opune pe Charles Hermite, gîndire pronunțat logică, lui Joseph Bertrand, care are o viziune concretă, intuitivă, spațială; într-o terminologie mai veche, primul este un analist, al doilea un geometru. Tot așa Weierstrass este mai degrabă logic, iar Riemann este preponderent intuitiv. Dar, în general, în viziunea oricărui matematician se combină logicul cu intuitivul, empiricul și teoreticul.

Interesante mărturii sînt aduse de Jacques Hadamard *(The psychology of invention in the mathematical field*, Dover Publications, 1954, New York*)*, care îl evocă pe Claparède. După acesta din urmă, există două tipuri de invenție, după cum căutăm mijloace pentru atingerea unui anumit scop sau ne interesează unde poate să ducă utilizarea unor mijloace determinate. Lui Hadamard, al doilea tip de invenție i se pare mai general și mai important. Aplicațiile practice importante au apărut de cele mai multe ori în mod imprevizibil. Grecii au studiat elipsa cu patru secole înainte de era noastră, dar a trebuit să treacă aproximativ 2000 de ani pentru ca în descoperirea legilor de mișcare ale planetelor, Kepler să se prevaleze de teoria conicelor, elaborată de greci, iar Newton să descopere, pe aceeași bază, legea atracției universale. Hadamard compară relația dintre aplicație și teorie cu aceea dintre frunză și copac: copacul suportă frunza, însă frunza hrănește copacul. Distanța dintre apariția unei teorii și utilizarea ei, uneori, după cum am văzut, foarte mare, este alteori foarte mică: radiotelegrafia a apărut la numai cîțiva ani după descoperirea undelor hertziene.

VALOARE ȘI ALEGERE

Pentru Hadamard, valoarea unui om de știință este în bună măsură determinată de felul în care el își alege problemele pe care le cercetează. Fenomenul poate fi observat chiar

la începători. Un student care vine la profesor să i se propună un subiect pentru o lucrare va primi, fără îndoială, îndrumarea cerută, dar nu-l va putea împiedica pe profesor să se întrebe: Oare la cursul sau la seminarul meu nu ți-ai dat seama care sînt direcțiile în care e necesară o dezvoltare a ideilor și rezultatelor existente? Dintre acestea, nu ai putut desprinde măcar o întrebare care te-ar putea interesa? Desigur, este nevoie aici și de ajutorul profesorului, dar determinantă trebuie să fie capacitatea de alegere a celui care efectuează cercetarea. Personalități ca Poincaré, Hadamard și filozoful francez Ernest Renan (1823—1892) sînt de părere că în această alegere un rol decisiv îl au un anumit simț al frumuseții științifice, o anumită sensibilitate estetică. În *L'Avenir de la Science* (p. 115), Renan consideră că există un gust științific așa cum există un gust literar-artistic. Pentru Hadamard, nu există o busolă mai sigură pentru omul de știință decît această sensibilitate estetică; pe baza ei putem intui importanța anumitor probleme, importanță a cărei confirmare poate veni după un timp foarte îndelungat, Această sensibilitate i-a condus pe vechii greci la studiul conicelor. Marele matematician Hadamard recurge la exemple din propria-i activitate. Cînd i-a prezentat profesorului său Hermite teza sa de doctorat, acesta din urmă i-a cerut să găsească aplicații. În acel moment, Hadamard n-a putut produce nici o aplicație, dar cu cîteva zile înainte de susținerea tezei a reușit să obțină un rezultat care răspundea la o problemă propusă de Academia Franceză de Științe (era vorba de funcția zeta a lui Riemann). Cîțiva ani mai tîrziu, în aceeași ordine de idei, Hadamard obține un nou rezultat (teorema de compoziție), pe care l-a comunicat amicului său, fizicianul și artistul Duhem, care l-a întrebat ce aplicații are. Declarîndu-i că nu are încă nici una, Hadamard a primit din partea lui Duhem următorul răspuns: Ești ca un pictor care începe să picteze un peisaj fără măcar să părăsească încăperea în care se află, pentru ca, într-o plimbare prin natură, să găsească un peisaj adecvat. În ciuda plauzibilității atitudinii lui Duhem, aplicațiile rezultatelor lui Hadamard s-au dovedit importante, dar ele au venit mai tîrziu.

Hadamard aduce în discuție introducerea, în 1913, de către Elie Cartan, a unei remarcabile clase de transformări analitice și geometrice, în relație cu teoria grupurilor. Însă, în afară de considerentul estetic, nimic nu pleda atunci, pentru transformările lui Cartan. 15 ani mai tîrziu, unele experimente în fizică au pus în evidență fenomene deosebite relative la

electroni, fenomene în a căror înțelegere transformările lui Cartan aveau un rol esențial.

Desigur, influențele sociale și istorice sînt foarte importante în alegerea problemelor cercetate. Hadamard se declară însă ignorant în ceea ce privește mecanismul acestor influențe, iar ideile enunțate în această privință de un autor important al timpului său, H. Taine (în *Philosophie de l'Art*), deși uneori marcate de geniu, i se par premature și foarte ipotetice în concluziile lor.

O SINGURĂ MATEMATICĂ?

Lumea matematicii este, ca și lumea literaturii, dominată de ficțiune. Este tot atîta ficțiune în geometria lui Euclid ca și în tragediile lui Eschil. Este tot atîta convenție la Euclid ca și la Eschil. Un univers de ficțiune ne dă posibilitatea să realizăm unele condiții care în realitatea contingentă pot fi cu greu satisfăcute. Ficțiunea literară, de exemplu, conferă personajelor o pregnanță și o semnificație exponențială pe care cu greu le poate dobîndi un om în carne și oase. Ficțiunea matematică realizează un standard de rigoare și precizie pe care nu-l poate atinge un obiect luat direct din natură sau o situație reală autentică. Aceste universuri de ficțiune, deși esențial diferite de universul real, se află cu acesta într-o legătură organică, se hrănesc din el și ne dau posibilitatea să înțelegem mai bine și mai profund universul real.

În *Dialoguri despre matematică* (Editura Academiei, Budapesta, 1965; versiune românească la Editura Științifică, București, 1967), Alfred Rényi propune un scenariu avînd drept personaje pe Socrate și pe Hipocrate. Hipocrate este de părere (p. 28) că, deoarece matematicianul are libertatea de a-și alege definițiile după voie, așa cum literatul are libertatea de a-și alege personajele și evenimentele pe care le dorește, matematica și literatura beneficiază de o libertate egală. Socrate nu este de acord cu acest punct de vedere: „De-ar fi așa, dragul meu Hipocrate, atunci ar exista atîtea matematici cîți matematicieni există / . . . / Cum se întîmplă totuși că matematicienii, în marea lor majoritate, sînt aproape totdeauna de acord în privința conceptelor care trebuie studiate? / . . . / De ce se întîmplă atît de frecvent ca doi matematicieni care trăiesc departe unul de celălalt / . . . / să descopere același

adevăr? În schimb, nu am auzit niciodată ca doi poeți să fi scris, în mod independent unul de celălalt, aceeași poezie".

Să analizăm răspunsul lui Socrate începînd cu sfîrșitul. Fără îndoială că mai degrabă demonstrează doi matematicieni, independent unul de altul, aceeași teoremă, decît scriu doi poeți aceeași poezie. Dar nu este greu de văzut că deosebirea se află chiar în modul de punere a problemei. Poezia este o manifestare de limbaj, ea contează prin toate detaliile lexicale, gramaticale și fonetice pe care le conține textul ei. Însă manifestările de limbaj sînt, în general, irepetabile. Ceea ce rostim la un anumit moment nu este niciodată identic din punct de vedere lexical, gramatical, prozodic și fonetic, cu ceea ce am rostit anterior. Dacă am considera o lucrare de matematică nu numai prin adevărul științific pe care ea îl conține ,ci și prin expresia ei lingvistică, atunci și matematica ar fi irepetabilă. Modul de prezentare adoptat de Stoilow sau de Barbilian este diferit din punct de vedere stilistic de orice alt mod de prezentare a matematicii. Nu există nici o șansă ca un matematician să regăsească, pe cale independentă, expunerea făcută de Barbilian pentru teoria grupurilor.

Constatăm deci că deosebirea de statut pe care o constată Socrate în ceea ce privește matematica și literatura își află sursa în modul diferit de a identifica o operă matematică față de o operă literară. După modelul adoptat în „Poetica matematică" (model inițiat de Pius Servien), matematica admite echivalențe sinonime nelimitate, în timp ce poezia are tendința de a se sustrage acestor echivalențe. Astfel se explică faptul că noi căutăm și azi să-i citim în original pe marii scriitori ai Antichității, pe cei clasici și moderni, în timp ce opera lui Newton, Riemann sau Weierstrass o asimilăm în versiuni prescurtate și modernizate.

IDEILE LUI ȘAFAREVIČ

Mai complicată este problema unicității matematicii, față de presupusa neunicitate a literaturii. Pînă la un anumit punct, matematicienii studiază, într-adevăr, aceleași obiecte (numere naturale, întregi, raționale, reale, complexe, puncte, drepte, cercuri, sfere etc.). Aceasta se întîmplă mai cu seamă cu conceptele de bază (cum ar fi acela de număr prim). Altfel, conceptele și problemele sînt, în multe privințe, diferite. Există sute, poate mii, de tipuri de integrale și mereu apar tipuri noi, exact cum apar mereu poezii noi. Dar oare poezia,

în ciuda acestui fenomen de irepetabilitate, nu prezintă şi ea, în istoria ei, o anumită unitate? Pentru a discuta mai îndeaproape această chestiune, ne vom referi la un articol al lui Igor R. Šafarevič *(On certain tendencies in the development of mathematics*, The Mathematical Intelligencer, vol. 3, 1981, no. 4, p. 182—184*)*.

Ceea ce îl frapează pe Šafarevič este faptul că, în ciuda dezvoltării ei prin acumulare de zeci de mii de eforturi individuale, răspîndite pe toate continentele, matematica prezintă, prin logica ei internă, prin legătura strînsă dîntre diferitele ei compartimente şi dintre diferitele ei etape istorice, imaginea unui organism unic, ghidat de un singur intelect, care se prevalează de diverşi autori, tot aşa cum o orchestră execută o simfonie aparţinînd unui singur compozitor, temele mişcîndu-se de la un instrument la altul. De îndată ce un membru al orchestrei nu mai poate continua, un altul preia şi duce mai departe acţiunea sa. O atare imagine trebuie comparată cu aceea propusă de Jean Bernard *(Création poétique et création scientifique*, Bulletin de l'Académie Royale de Langue et de Littérature Françaises, Bruxelles, vol. 58, no. 3—4, 1980, p. 250—257*)*, pentru care dispariţia unui savant este nu o pierdere definitivă, ci numai o întîrziere, o amînare a ceea ce el n-a mai apucat să creeze. Istoria matematicii este într-adevăr bogată în situaţii în care o descoperire rămasă necunoscută este recuperată ulterior cu deosebită acurateţe, prin lucrarea unui alt savant. Într-o scrisoare compusă în noaptea dinaintea duelului în care şi-a găsit sfîrşitul, Évariste Galois a formulat unele propoziţii fundamentale privind integralele funcţiilor algebrice. Peste 20 de ani mai tîrziu, B. Riemann, care n-avea cum să cunoască scrisoarea lui Galois, a reenunţat şi demonstrat propoziţiile formulate anterior de Galois, la care a mai şi adăugat una nouă. La fel s-a întîmplat cu geometria neeuclidiană. După lucrările independente efectuate de Lobacevski şi Bolyai, Gauss şi Schweikart ajung independent la aceleaşi rezultate.

Totuşi, în numeroase cazuri nu există nici o garanţie că ceea ce un matematician n-a apucat să elaboreze şi să publice va fi regăsit de un alt autor. Un model matematic al unui fenomen este rezultatul unei alegeri infinite, deci, odată pierdut, s-ar putea ca el să nu mai fie regăsit. Pentru a mă referi la propriul meu domeniu de activitate, nu cred că dacă A. N. Kolmogorov n-ar fi apucat să publice modelul său algebric pentru cazul gramatical, oricum un alt autor ar fi propus sau va propune acelaşi model. Problema comportă o discuţie ulterioară.

În eseul său *A fi, a face, a avea* (Editura Cartea Românească, Bucureşti, 1985, în special paginile 175—184), Mihai Şora discută două tipuri de texte, să le spunem *A* şi *B*. Tipul *A* se bazează pe reţetare şi moduri de operare, tipul *B* scapă oricăror norme. Tipul *A* poate fi complet receptat de către oricine iniţiat în instrumentarul corespunzător, în timp ce receptarea tipului *B* nu este niciodată totală. Tipul *A* este deci transparent pentru cei iniţiaţi, opac pentru profani; tipul *B* nu este, în general, nici transparent nici opac, ci rămîne veşnic într-o stare intermediară, pe care Mihai Şora o exprimă prin epitetul de translucid. (Este deci altă convenţie decît la Tudor Vianu, unde transparenţa textului ştiinţific este opusă opacităţii textului poetic). Tipul *A* are numai întindere şi cuprindere, tipul *B* are adîncime şi înălţime. Din tipul *A* *aflăm* despre anumite lucruri, iar *aflatul* este totdeauna epuizabil; din tipul *B* *ştim*, iar *ştiutul* este inepuizabil. Aflatul nu are grade între transparent şi opac, ştiutul însă comportă grade de translucidităte. Desigur, lui Şora nu-i scapă faptul că şi într-un text de tipul *A* unele porţiuni pot fi transparente, altele opace, în funcţie de pregătirea cititorului, dar situaţia rămîne tot una de polarizare, în timp ce într-un text de tipul *B* o infinitate de grade de translucidităte sînt posibile, fără ca despre vreunul dintre aceste grade să se poată spune că este maxim sau minim. Am putea asimila textele de tipul *A* cu o funcţie care ia numai valorile zero şi unu, în timp ce textele de tipul *B* sînt descrise de o mulţime imprecisă (în sensul lui L. Zadeh: *fuzzy set*) de natură specială, constînd într-o funcţie care asociază fiecărui text de tipul *B* o valoare strict cuprinsă între zero şi unu. Ştiutul, textele de tipul *B*, sînt, pentru Şora, nu numai inepuizabile, ci şi imprevizibile, mereu noi şi proaspete. Ni se sugerează astfel că aflatul, textele de tipul *A*, oricît ar fi de complicate, sînt epuizate într-un timp finit, după care ele nu mai prezintă nici un interes. Aici îşi are explicaţia faptul că o operă ştiinţifică nu rămîne atît prin textul autorului ei, cît prin ideile, mereu reformulate, pe care el le-a dezvoltat. Expresia lingvistică a acestor idei se schimbă mereu, în funcţie de evoluţia limbajului ştiinţific.

Dacă mai era vreo îndoială în ceea ce priveşte asocierea tipului *A* cu textele ştiinţifice — în primul rînd cele matematice — şi a tipului *B* cu textele poetice, această îndoială este risipită de modul în care Şora alege exemplele. Pentru

tipul *A* ni se propune un fragment din volumul lui Wang Hao, *Studii de logică matematică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1972 (versiune românească a lucrării *A Survey of Mathematical Logic*, Science Press, Peking, 1962), în care se explică mecanismul de atribuire a numerelor lui Gödel; este însă vizibil vorba de un fragment din demonstraţia faimoasei teoreme de incompletitudine a lui Gödel. Pentru textele de tipul *B* sînt alese ca reprezentative cîteva texte eminesciene (de exemplu: *Alb trecea el întunecînd cu totul/Vastul plan al singurătăţii mele* ...).

S-a emis ipoteza că ipostaza iniţială a limbajului a fost de natură poetică. Cuvintele aveau prospeţime, nici o expresie nu apucase să se rutinizeze, clişeele lingvistice erau inexistente. Urmele acestei situaţii sînt vizibile şi azi. De ce oare primele texte ştiinţifice în limba română, a se vedea, de exemplu, *Trigonometria* lui Gheorghe Lazăr, se impun şi prin valoarea lor literară? De ce textele de limbă română veche, în general, au acea *expresivitate involuntară* pe care a analizat-o Eugen Negrici? Mihai Şora recunoaşte că „în momentul de constituire a oricărei discipline ştiinţifice are loc o operaţie poetică de instituire a ireductibilelor (sau, cum li se mai spune, a noţiunilor primitive)" şi se referă la „zestrea translucidă a propoziţiilor primitive". Propoziţiile primitive sînt desigur axiomele. Dar, pentru Şora, momentul ştiinţific este ulterior acestor propoziţii primitive. De aceea, el opune statutului real al omului de ştiinţă, pe care-l aşază sub semnul ambiguităţii (ambiguitatea rezultînd din ezitarea între translucidul propoziţiilor iniţiale şi transparenţa propoziţiilor derivate), statutul său formal, ancorat exclusiv în descifrarea unui text de tip *A*.

ZONA TRANSLUCIDĂ A MATEMATICII

Să încercăm să analizăm natura translucidă a propoziţiilor primitive. De fapt, nu este vorba numai de propoziţii, ci şi de termeni primitivi, ca *mulţime*, *număr natural* etc. Iată, de exemplu, un eşantion dintr-o prezentare a geometriei lui Euclid. Termeni nedefiniţi: punct, dreaptă. Axioma 1: Orice dreaptă este o colecţie de puncte; Axioma 2: Există cel puţin două puncte; Axioma 3: Dacă p şi q sînt puncte distincte, atunci există o dreaptă şi numai una conţinînd pe p şi pe q; Axioma 4: Dacă L este o dreaptă, atunci există un punct nesituat pe L; Axioma 5: Dacă L este o dreaptă, iar p este un punct care nu aparţine

lui L, atunci există o singură dreaptă care trece prin p și este paralelă cu L. Desigur, putem avea și axiome mai generale, ca „Două lucruri egale cu un al treilea sînt egale între ele "sau„ Lucruri egale adunate la lucruri egale dau lucruri egale". Aristotel considera că orice știință demonstrativă trebuie să ia ca punct de plecare anumite principii nedemonstrabile; altfel, etapele de demonstrație ar fi fără sfîrșit. Principiile nedemonstrabile comune tuturor științelor sînt, pentru Aristotel, *axiome*, în timp ce celelalte principii nedemonstrabile sînt *postulate*. Un exemplu foarte familiar de axiomă este următorul: cantități egale scăzute din cantități egale dau cantități egale.

Evident, nu se poate nega poeticitatea latentă a acestor propoziții, capabile să stimuleze la nesfîrșit reflecția și imaginația. Dar sînt oare aceste propoziții primitive singura zonă translucidă a limbajului științific? Să revenim la fragmentul gödelian propus de Șora. Desigur, pentru înțelegerea sa este nevoie de asimilarea prealabilă a unui instrumentar. Însă nici înțelegerea textului eminescian nu este posibilă fără asimilarea prealabilă a unor reguli, anume a celor care stau la baza limbii române. Limba română nu este și ea un instrumentar? Textul matematic pretinde, e drept, pe lîngă cunoașterea limbii naturale în care este el scris, și a unui limbaj artificial, constînd în simboluri și formule; dar aceasta se referă numai la structura și amploarea instrumentarului folosit, în timp ce Șora vorbește despre o deosebire nu de grad, ci de natură între tipurile A și B.

Dacă necesitatea cunoașterii instrumentarului este incontestabilă în ambele cazuri (A și B), este oare această cunoaștere și suficientă? Șora răspunde afirmativ în ceea ce privește tipul A, negativ pentru B. Fiind de acord cu cel de al doilea răspuns, să examinăm legitimitatea primului. În discuție se află aici însăși natura înțelegerii unui text matematic. Dacă reducem această înțelegere la verificarea corectitudinii tuturor silogismelor și calculelor folosite, atunci Șora are dreptate. Silogismele și calculele sînt în număr finit și devin perfect transparente prin asimilarea regulilor jocului. Dar în jurul lor o sumedenie de întrebări ne asaltează, privind relevanța problemei studiate, posibile legături cu alte probleme, motivația conceptelor folosite și a teoremelor stabilite, posibilitatea simplificării demonstrației, a generalizării teoremelor obținute, impactul lor asupra altor domenii (matematice sau extramatematice). În ceea ce privește teorema lui Gödel, la care se referă Șora, acest ecou infinit este incontestabil. Descoperirea, în gîndirea lui Gödel, a unor verigi

de legătură cu muzica lui Bach și gravurile lui Escher este simptomatică în această privință. Marele matematician polonez St. Banach spunea că în matematică un rol esențial îl au analogiile: între concepte, între demonstrații, între teoreme, între teorii și între ... analogii. Desigur, în matematică există o parte de meserie care se învață pe baza unor definiții și reguli, dar a o confunda cu aceasta este ca și cum am reduce poezia la ansamblul de reguli care guvernează ritmul și rima și la sensurile denotative ale cuvintelor folosite.

CONTEXT ȘI IN-TEXT

Caracterul inepuizabil al conceptelor și teoremelor matematice poate fi observat chiar la unele fapte mai elementare. Un concept ca acela de număr prim, o teoremă ca aceea a lui Pitagora vor fi contemplate indefinit de noi și noi generații, iar imaginația pe care ele o stimulează este practic nelimitată. Ce înseamnă a înțelege numărul prim? Definiția corespunzătoare revine la un text de tipul *A* ușor epuizabil; tot așa cum cuvintele care alcătuiesc un vers eminescian pot fi și ele învățate cu ajutorul dicționarului. Dar numărul prim intră într-o infinitate de corelații, cu obiecte atît de eterogene, cum ar fi funcția logaritmică și funcția zeta a lui Riemann și cu probleme dintre cele mai neașteptate, cum sînt recent cele din domeniul criptografiei. Teorema lui Pitagora este regăsită în teoria sistemelor ortogonale și în studiul seriilor trigonometrice. Această capacitate infinită a unui text matematic lapidar, cum este enunțul unei teoreme, de a intra în analogie și în legătură cu o infinitate de alte texte ține ea de domeniul epuizabilului, al transparenței? Nu este la fel de translucidă ca și receptarea poeziei? Vom putea spune vreodată că am epuizat înțelegerea numerelor iraționale? Nu vom fi mereu extaziați și provocați de noile lor corelații? (Un singur exemplu: limbajele regulate și cele independente de context corespund, respectiv, numerelor raționale și celor algebrice; putea cineva să bănuie, în urmă cu 30 de ani, o asemenea analogie?)

Mihai Șora asociază textele de tipul *A* cu contextul, iar textele de tipul *B* cu in-textul. Contextul „crește ca un depozit, aglomerîndu-se fără încetare". Contextul intră în „memoria culturală a omenirii", lărgind mereu cîmpul semantic al cuvintelor, dar posibilitățile sale combinatorice se raportează la *a avea*. In-textul, dimpotrivă, ține de *a fi*,

le se asociază cu „devălmășia paradisiacă" în care a apărut pentru prima oară cuvîntul, cu starea de totală inocență, situație-limită a preverbalului". In-textul se asociază, la Șora, cu „soluția suprasaturată a încă indistinctului univers tactil-gustativ-olfactiv-auditiv-vizual-cinestezic, încărcat de emoție și de afectivitate". In-textul apare astfel incorporat în existența noastră prenoetică, din el extragem mereu noi resurse de prospețime și candoare. In in-text „se contopesc toate precuvintele care, de-a lungul vieții, au constituit substanța întîlnirilor noastre cu lumea". Chiar numai pe baza celor de mai sus, este suficient motivată asocierea contextului cu activitatea de tip semiotic, secvențială, făcînd apel mereu la un intermediar, în timp ce in-textul este mai degrabă de natură preverbală, asociat cu fiorul revelațiilor noastre fundamentale; primul se află deci sub controlul emisferei cerebrale stîngi, al doilea sub cel al emisferei cerebrale drepte. O afirmație categorică a lui Șora nu mai lasă, în această privință, nici o posibilitate de îndoială: „Spre deosebire de ale contextului, care sînt de tip aditiv ... , conotațiile in-textului, de tip instantaneu și imediat, rezultă din continuă cunoaștere a mea (a ta, a lui) (a noastră, a voastră, a lor) și a Lumii ...". Găsim aici formulată limpede distincția dintre caracterul secvențial, mediat al activităților controlate cu precădere de emisfera cerebrală stîngă și natura concomitentă, de imediatețe (în sensul absenței unui intermediar) a intuițiilor și afectivității, aflate sub dominarea emisferei cerebrale drepte.

IN-TEXTUL ȘTIINȚEI

Este locul să ne întrebăm dacă textele științifice nu își au și ele in-textul lor. Potențialul intertextual al unui text din această categorie este imens. Desigur, avem în vedere atitudinea creatoare în fața acestor texte, nu pe aceea artizanală. De multe ori, în compararea științei cu literatura, se comit erori chiar în punctul de plecare, erori care țin de anumite presupoziții, de obicei neconștientizate. Orice text care aparține unui domeniu de creație, fie ea științifică sau literară, filozofică sau inginerească, comportă diferite straturi de organizare. În orice astfel de domeniu există și o parte artizanală, care cere o inițiere bazată pe definiții, reguli și observație directă a unor obiecte. Nu trebuie disprețuită această componentă meșteșugărească existentă în orice domeniu de creație. Nici nu este sigur că putem trasa

totdeauna cu precizie granița dintre meșteșug și artă. Într-o carte ca aceea a lui Mihai Dinu (*Ritm și rimă în poezia românească*, Editura Cartea Românească, București, 1986), dedicată unor aspecte ale prozodiei românești, observațiile de finețe, relevante din punct de vedere artistic, țîșnesc la tot pasul, alternînd cu considerații de tehnică prozodică. Nu ar fi însă onest ca, într-o confruntare a științei cu literatura, să extragem din prima numai partea artizanală, iar din a doua numai partea propriu-zis creatoare. Tipurile *A* și *B*, primul reprezentînd textele transparente sau opace, iar al doilea textele translucide, pot fi considerate termeni de referință în raport cu care orice text de creație își găsește un loc adecvat. Sub acest aspect, al unui sistem de coordonate, considerațiile lui Mihai Șora pot fi recuperate și valorificate. Separarea transparentului de translucid este o întreprindere anevoioasă, care nu comportă rețete și care pretinde o cercetare distinctă în fiecare caz în parte. Granița mișcătoare dintre ele va rămîne mereu o provocare la adresa lucidității noastre.

Este interesantă ideea „continuei co-nașteri" sub semnul căreia Mihai Șora (p. 191 a cărții sale) așază in-textul. Dar această ideea este deopotrivă importantă pentru știință și pentru artă. Un întreg curent în domeniul psihologiei creației explică momentele de iluminare legate de descoperiri și invenții prin prospețimea pe care o realizează creierul, după odihnă, după un somn bun. Helmholtz mărturisea că niciodată nu i-a venit o idee fericită atunci cînd se afla în stare de oboseală. S-a vorbit, în acest sens, și de funcția terapeutică a uitării. Constantin Noica relatează că, întrebîndu-l pe Moisil ce recomandă unui tînăr, pentru a reuși în cercetare, Moisil a răspuns: „Să dormi, să dormi, să dormi". Sensul acestei recomandări, în stilul paradoxal atît de tipic moisilian, este clar: Caută să te așezi la masa de lucru cît mai odihnit și cu mintea cît mai proaspătă. Am cunoscut chiar oameni de știință care mizează aproape exclusiv pe momentele din primele ore ale dimineții, cînd consideră că au șansa maximă de a fi vizitați de idei noi. Atît în știință, cît și în artă, creația autentică prezintă o anumită simplitate, o întoarcere la origini, identificarea unei structuri profunde, care a posteriori poate stîrni mirarea că nu a fost observată anterior. Să ne gîndim, de exemplu, la sculpturile lui Brâncuși, la legea gravitației universale a lui Newton, la Luceafărul eminescian, la ecuația einsteiniană privind relația dintre energie și masă. S-a făcut de multe ori observația că un poet sau un om de știință își datorează condiția lor de creator

capacității de a-și menține curiozitatea și candoarea copilăriei. Dar pentru ca să existe copilărie trebuie să existe mai întîi naștere. Copilăria constă, în mare măsură, într-o atitudine interogativă în fața lumii. Poeții și oamenii de știință, inventatorii și descoperitorii se recrutează dintre cei care reușesc să-și mențină și să-și dezvolte atitudinea interogativă și după ieșirea din copilărie. Dar aceasta nu este altceva decît capacitatea de a te naște mereu din nou, de a privi mereu lumea cu ochii dintîi.

Din acest punct de vedere, matematica și poezia sînt indiscernabile. Amîndouă sînt deopotrivă bogate în context și în in-text, în aspecte transparente și aspecte translucide.

IGIENA RAȚIONAMENTULUI MATEMATIC

Pînă la sfîrșitul secolului trecut, matematica s-a mulțumit cu logica spontană a simțului comun, logică legiferată în urmă cu 2 000 de ani de către Aristotel. La baza ei se află principiul identității $(A = A)$, principiul necontradicției (o propoziție nu poate fi în același timp adevărată și falsă) și principiul terțului exclus (o propoziție este sau adevărată sau falsă; a treia posibilitate nu există). Începînd cu sfîrșitul secolului trecut, o serie de evenimente care au avut loc în matematică (în special în studiul infinitului), în fizică (în special în teoria relativității și în mecanica cuantică), în biologie și în alte discipline au condus la situații logice noi, care pretindeau o atenție mai mare acordată acurateței raționamentului. O serie de dificultăți, manifestate sub formă de paradoxuri, au pus sub semnul întrebării validitatea principiilor logicii aristotelice. În teoria mulțimilor, au apărut propoziții care sfidau principiul necontradicției, dovedindu-se a fi în același timp adevărate și false. În mecanica cuantică, statutul particulei elementare devenea incompatibil cu principiul identității. Tot atît de amenințat s-a văzut și principiul terțului exclus. Matematica, fizica, biologia, disciplinele social-umaniste au manifestat, în acest secol, o nevoie tot mai mare de logici cu mai multe valori, care încalcă, într-un fel sau altul, principiul terțului exclus.

La începutul secolului nostru, punerea în evidență a axiomei alegerii, după care, fiind dată o familie de mulțimi nevide și disjuncte, există o mulțime care conține cîte un element din fiecare mulțime a familiei, a atras atenția asupra operației delicate a *alegerii*. Din mulțimea tuturor perechilor

de pantofi putem alege din fiecare pereche pantoful stîng. Însă din mulțimea, considerată infinită, a perechilor de ciorapi nu putem alege cîte un ciorap din fiecare pereche dacă nu facem apel la axioma alegerii. A admite existența unui element cu anumite proprietăți nu este tot una cu a-l găsi. Așa a apărut *intuiționismul* filozofic, care nu admite folosirea principiului terțului exclus atunci cînd este vorba de mulțimi infinite. Însă prin aceasta era pus sub semnul întrebării raționamentul prin reducere la absurd, atît de frecvent folosit în matematică. Acest raționament este condiționat de acceptarea principiului terțului exclus.

Reconsiderarea logicii clasice a fost determinată și de alte considerente. Ofensiva informaticii și calculatoarelor a atras atenția asupra distincției tot mai importante dintre *existența* unui obiect matematic și *obținerea lui efectivă*, punînd în același timp problema *costului* acestei obțineri. A devenit astfel esențial să se distingă între un raționament neconstructiv și un altul de natură constructivă, algoritmică; între un algoritm neeconomic (a cărui implementare cere un timp prea lung sau o memorie de calculator prea mare) și altul, economic. În această ordine de idei, a căpătat o deosebită importanță distincția operată de Kurt Gödel între o propoziție adevărată și o propoziție demonstrabilă.

Desigur, faptele evocate mai sus depășesc programa școlară actuală; de aceea, ne vom ocupa în primul rînd, în cele ce urmează, de igiena raționamentului matematic clasic; însă, deoarece elevii și studenții de azi vor intra în profesie într-un moment în care poziția socială a informaticii și a colaborării matematicii cu celelalte discipline va fi tot mai importantă, vom acorda cîteva paragrafe și noilor dezvoltări. De altfel, începînd cu anul școlar 1987—1988, programa de matematică de la clasele gimnaziale va cuprinde și elemente de informatică. Acest proces de introducere a gîndirii și practicii algoritmice și computaționale va căpăta fără îndoială o amploare tot mai mare în întregul învățămînt (un proces similar se desfășoară în multe alte țări), deoarece cele mai multe profesii sînt influențate de revoluția informatică. Este deci în interesul oricărui adolescent și al oricărui tînăr de a se familiariza cu noile tendințe.

MAI MULT DECÎT DE GREȘELI, SĂ NE FERIM DE NONSENSURI

Discutăm despre limbajul matematic folosindu-ne de limba română. Spunem, în aceste condiții, că *limbajul-obiect* este cel matematic, iar limba română este *metalimbajul* folosit în studiul limbajului matematic. Distincția dintre limbaj-obiect și metalimbaj a fost introdusă de către logicianul polonez Alfred Tarski, în urmă cu peste 50 de ani. Să observăm că metalimbajul poate interfera cu limbajul-obiect, cum se și întîmplă în cazul nostru, deoarece o parte din limba română devine o componentă (numită de obicei *componentă naturală*) a limbajului matematic, cealaltă componentă *(artificială)* fiind constituită din simboluri, formule și alte mijloace grafice.

Cele ce urmează se referă *nu* la descoperirea matematică (act de o mare complexitate psihică, în care intră raționamentul, inspirația, imaginația, emoția, intuiția, observația, memoria, experiența etc.), ci la expunerea (scrisă) a matematicii, ca înlănțuire de definiții, teoreme și demonstrații.

Un concept de bază în această privință îl constituie *propoziția logică* (pe care nu trebuie s-o confundăm cu *propoziția gramaticală*). O propoziție logică este o aserțiune care are proprietatea de a fi adevărată sau falsă, nu însă și una și alta. Este deci clar că, dintre propozițiile gramaticale, numai cele declarative pot fi propoziții logice. Să luăm cîteva exemple: a) $3 + 5 = 8$; b) Plouă; c) $3 + 5 = 9$; d) x este un număr prim; e) Soarele se învîrte în jurul Pămîntului; f) Acest enunț este fals; g) Bravo!; h) Cît este ceasul?; i) Pătratul este un poligon sau cercul este un poligon; j) Numărul *pi* este rațional iar numărul *e* este irațional; k) Sfera isoscelă converge în medie; m) Persoanele în vîrstă de peste 500 de ani sînt foarte dotate la matematică; n) Fiind dat un număr a pozitiv, există un număr real inferior lui 100; p) Pentru orice funcție reală f de o variabilă reală putem găsi o mulțime A disjunctă de f; r) Diametrul unui cerc de rază egală cu 5.

Propoziția a este adevărată, iar propoziția c este falsă. Propoziția b este adevărată sau falsă în raport cu momentul și locul în care ea este enunțată. Despre o astfel de propoziție se spune că este *contingent adevărată* sau *contingent falsă*. Enunțul d este o propoziție dacă x este un număr întreg; în acest caz, propoziția este adevărată sau falsă, în funcție de valoarea lui x. Propoziția e este falsă, dar era considerată adevărată într-o viziune mai veche; se constată astfel carac-

terul istoric al adevărului sau falsității unor propoziții. Important este aici faptul că valorile de adevărat și fals au fost asociate consecutiv, nu concomitent, enunțului în discuție. Propoziția *m* este adevărată, deoarece nu există și nu au existat persoane în vîrstă de peste 500 de ani. Despre ceea ce nu există se poate afirma tot ceea ce are sens. Altfel spus, dacă premisa *A* nu se realizează niciodată, atunci din *A* rezultă *B*, oricare ar fi *B*. În ciuda aparenței contrare, aserțiunea *n* nu este lipsită de sens, ci are statut de propoziție adevărată, vulnerabilă însă prin prezența parazită a primei ei părți („fiind dat un număr *a* pozitiv") și prin sugerarea dependenței (de fapt fictive) existenței unui număr inferior lui 100 de faptul de a ne da în prealabil numărul *a*. Aserțiunea *p* este o propoziție gramaticală, dar nu este o propoziție logică, fiind o aserțiune lipsită de sens (disjuncția poate avea loc între două mulțimi, dar nu are sens între o mulțime și o funcție). Aserțiunea *r* nu este nici propoziție gramaticală nici propoziție logică, deoarece nu conține nici un predicat (nici măcar subînțeles). Propoziția gramaticală *g* este exclamativă, deci nesusceptibilă de a fi adevărată sau falsă; deci nu este o propoziție logică. Propoziția gramaticală *h* este interogativă, deci nu i se poate asocia valoarea de adevărat sau fals; rezultă că nu este o propoziție logică. Propoziția *i* este disjuncția logică a două propoziții, prima fiind adevărată, iar a doua falsă. Rezultă că *i* este adevărată (deoarece disjuncția logică a două propoziții este adevărată dacă cel puțin una dintre propoziții este adevărată). Propoziția *j* este conjuncția logică a două propoziții dintre care prima este falsă, iar a doua adevărată; rezultă că *j* este falsă (deoarece conjuncția logică a două propoziții este adevărată numai dacă ambele propoziții sînt adevărate). Enunțul *k* este lipsit de sens, deci, deși este o popoziție gramaticală, nu este o propoziție logică.

Am lăsat în mod intenționat la sfîrșit enunțul *f*, datorită situației sale mai speciale. Acest enunț este autoreferențial, adică afirmă ceva despre sine însuși. Pentru a-i acorda statutul de propoziție (logică), trebuie să fie asociat cu una și numai una dintre valorile *adevărat, fals*. Să considerăm, pe rînd, fiecare dintre cele două eventualități favorabile. Dacă enunțul ar fi adevărat, atunci ar rezulta, conform conținutului enunțului, că el este fals; dacă enunțul ar fi fals, atunci ar trebui să fie adevărată negația sa, deci n-ar fi adevărat că enunțul este fals, deci el ar fi adevărat. Cu alte cuvinte, din ipoteza că enunțul *f* este adevărat rezultă că el este fals, iar din ipoteza că este fals rezultă că el este

adevărat. În oricare dintre cele două cazuri enunțul *f* este în același timp adevărat și fals, deci nu poate fi considerat o propoziție logică. Un enunț de tipul lui *f* contrazice principiul necontradicției și constituie un *paradox*. (Se observă însă că în stabilirea acestui fapt s-a folosit principiul terțului exclus).

CONECTIVE SAU OPERAȚII LOGICE

Conectivele exprimă diferite tipuri de legături (operații) logice, exprimate lingvistic prin *și* (conjuncția logică), *sau* (disjuncția logică), *non* sau *este fals că* (negația logică) și *dacă ... atunci ...* Denumirea de *conectiv* provine din cuvîntul *conexiune*, sinonim cu *legătură*; într-adevăr, conectivele corespund la diferite moduri de legături între propoziții, pe baza cărora se obțin alte propoziții mai complexe. Cu excepția negației, care se aplică unei singure propoziții, fiecare conectiv leagă două sau mai multe propoziții. Definiția fiecărui conectiv se face prin indicarea modului în care se operează cu el. Să începem cu negația. Negația este acel conectiv care asociază fiecărei propoziții S o propoziție *non* S care este adevărată ori de cîte ori S este falsă și este falsă ori de cîte ori S este adevărată. Conectivul negației intervine în orice raționament prin reducere la absurd, deci importanța sa este evidentă.

Conectivul *și* asociază fiecărei perechi de propoziții S și T propoziția notată S *și* T, definită prin proprietatea de a fi adevărată dacă și numai dacă atît S cît și T sînt adevărate (deci în toate celelalte cazuri fiind falsă). Am avut prilejul să analizăm o propoziție formată cu ajutorul conectivului *și* în paragraful anterior, unde enunțul *j* era exact de acest tip. Conectivul *și* corespunde operației numite *conjuncție logică*. Să observăm că el se poate extinde de la două la mai multe propoziții. Conjuncția logică a propozițiilor $S_1, S_2, \ldots, S_n$ conduce la o propoziție care este adevărată dacă toate cele n propoziții sînt adevărate și falsă dacă cel puțin una dintre cele n propoziții este falsă. Fie de exemplu propozițiile (în care g aplică intervalul $(0,1)$ în R): S = „Funcția g este continuă", T = „Funcția g este monotonă" și U = „Funcția g este mărginită". Conjuncția logică a acestei propoziții este: „Funcția g este continuă, monotonă și mărginită"; ea este adevărată numai dacă toate cele trei propoziții S, T și U sînt adevărate.

Conectivul *sau* corespunde operației de *disjuncție logică* (a se vedea exemplul *i* din paragraful anterior) și asociază propozițiilor S și T propoziția S *sau* T, adevărată exact atunci cînd cel puțin una dintre propozițiile S și T este adevărată. Extensiunea la n propoziții este imediată: Disjuncția logică a propozițiilor $S_1, S_2, \ldots, S_n$ conduce la o propoziție adevărată numai dacă măcar una dintre cele n propoziții este adevărată. De exemplu, dacă S, T și U sînt propozițiile din exemplul anterior, disjuncția lor este adevărată de îndată ce funcția considerată are măcar una dintre proprietățile de continuitate, monotonie și mărginire.

Pornind de la anumite propoziții și aplicîndu-le operațiile logice considerate, într-o ordine arbitrară, se obțin noi propoziții. În matematică este frecventă negația unei conjuncții de propoziții sau a unei disjuncții de propoziții, guvernată de așa-numitele legi ale lui De Morgan, care se stabilesc ușor: Negația unei conjuncții de propoziții este egală cu disjuncția negațiilor acestor propoziții; negația unei disjuncții de propoziții este egală cu conjuncția negațiilor acestor propoziții.

Este locul să observăm aici o anumită deosebire între negația lingvistică și cea logică. Un enunț ca *Toți elevii sînt atenți* este negat, în vorbirea obișnuită, prin *Unii elevi nu sînt atenți*. În logică însă forma optimă a negației este: *Există (cel puțin) un elev neatent*. În nici un caz nu este corectă forma *Nici un elev nu este atent* ca negație a propoziției onsiderate.

INFERENȚĂ ȘI PREDICATE

Conectivul *dacă ... atunci ...* descrie structura generală a unei teoreme: Dacă A, atunci B. Îl putem descrie prin atribuirea valorii de adevăr propoziției *(A și B) sau non A*, obținute prin disjuncția logică a propozițiilor A *și* B și *non* A. Inferența este reflexivă *(Dacă A, atunci A)* și tranzitivă (Din *Dacă A, atunci B* și *Dacă B, atunci C* rezultă *Dacă A, atunci C*, însă nu este simetrică (Din *Dacă A, atunci B* nu rezultă *Dacă B, atunci A*). În cazul în care are loc și inferența inversă, este validată *teorema reciprocă* teoremei inițiale. Alături de teoreme (cum ar fi teorema lui Pitagora sau teorema lui Tales) pentru care teorema reciprocă este adevărată, există teoreme a căror reciprocă este falsă (Orice număr prim superior lui 2 este impar, dar nu orice număr impar superior lui 2 este prim).

Iată cîteva exemple de inferențe: a. *Dacă non (non A), atunci A*; b. *Dacă (A și B), atunci (A sau B)*; c. Dacă *(non A) și (non B)*, atunci *non (A sau B)*; d. Dacă *A*, atunci *(B sau (non B))*; e. Dacă *non (A sau B)*, atunci *((non A) și (non B))*; f. Dacă *B*, atunci *non (A și (non A))*. Să observăm că *a* exprimă principiul terțului exclus. În baza aceluiași principiu, propoziția *B sau (non B)* este adevărată oricare ar fi propoziția *B*, deci inferența *d* este corectă oricare ar fi propoziția *A*. În baza principiului necontradicției, propoziția *C = A și (non A)* este falsă oricare ar fi propoziția *A*, deci, folosind din nou principiul necontradicției, rezultă că propoziția *non C = non (A și (non A))* este adevărată oricare ar fi *A*; de aici rezultă că inferența *Dacă B, atunci non C* este corectă oricare ar fi propoziția *B*. Reciproca inferenței *b* nu este adevărată. În ceea ce privește inferențele *c* și *e*, observăm că fiecare dintre ele este reciproca celeilalte. Se obține astfel egalitatea *non (A sau B) = (non A) și (non B)*, adevărată oricare ar fi propozițiile *A* și *B*. Într-o situație asemănătoare se află egalitatea *non (A și B) = (non A) sau (non B)*. Aceste două egalități constituie identitățile lui De Morgan și au fost obținute în secolul trecut.

Este interesant de observat că operațiile logice cu propoziții se află în corespondență cu operațiile cu mulțimi. Disjuncția logică corespunde reuniunii mulțimilor, conjuncția logică se asociază cu intersecția din teoria mulțimilor, iar negația logică se asociază cu operația de trecere la complementară. Să numim *propoziție deschisă* sau *predicat* o funcție definită pe o mulțime *D*, cu valori în mulțimea *S* a propozițiilor logice. Astfel, expresia $n^2 > n$ definește un predicat pentru care domeniul *D* este mulțimea *N* a numerelor naturale (dar ar putea fi și mulțimea *R* a numerelor reale etc.). Avem aici un exemplu de *predicat unar* pe care-l putem nota $P(n)$. Pentru $n = 1$ obținem o propoziție falsă, pentru $n > 1$ propoziții adevărate. Tot un predicat unar este și inegalitatea $3x > 5$, unde $D = R$; pentru $x > 5/3$ obținem propoziții adevărate, iar pentru $x \leqslant 5/3$ obținem propoziții false. Ecuația $3x - 5y - 7 = 0$ definește un *predicat binar* $P(x, y)$, deoarece conține două variabile. Domeniul *D* este aici planul, adică $R \times R$. Pentru unele perechi de valori (x, y) predicatul dă naștere unei propoziții adevărate (de exemplu, aceasta se întîmplă dacă $x = 3$ și $y = 2/5$), pentru altele (de exemplu $x = y = 1$) se obține o propoziție falsă.

Putem deci spune că un predicat este o colecţie de propoziţii. Aşa cum propoziţia logică este altceva decît propoziţia gramaticală, predicatul logic este altceva decît predicatul gramatical. Totuşi, în general o propoziţie gramaticală declarativă este suportul unei propoziţii logice, iar un predicat gramatical dă naştere unui predicat logic. Propoziţia gramaticală este „cea mai mică unitate a sintaxei care poate apărea de sine stătătoare şi care comunică o judecată logică sau o idee cu caracter afectiv sau voliţional" *(Gramatica limbii române*, vol. II, ediţia a doua, Editura Academiei, Bucureşti, 1963, p. 7). Propoziţia gramaticală este alcătuită din cuvinte, pe cînd propoziţia logică este formată din noţiuni. O propoziţie logică are ca suport un şir de una sau mai multe propoziţii gramaticale (de exemplu, şirul de trei propoziţii gramaticale *Funcţia logaritmică este crescătoare, admite derivată şi este integrabilă pe* $[1, 2]$ este o propoziţie logică), dar reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, aşa cum am observat, dintre propoziţiile gramaticale numai cele cu caracter declarativ *(Ion citeşte ziarul*; *Funcţia* $f(x) = x + 1$ *este continuă în* R*)* pot fi suportul unor propoziţii logice. Semnificaţia unei propoziţii declarative este o propoziţie logică unic determinată, dar aceeaşi propoziţie logică admite, în general, mai multe propoziţii declarative drept suport lingvistic. Astfel, propoziţiile grimaticale *Mulţimea numerelor naturale este infinită* şi *Există o infinitate de numere naturale* exprimă una şi aceeaşi propoziţie logică.

Din discuţia de mai sus rezultă şi relaţia dintre predicatul logic şi cel lingvistic (gramatical). O propoziţie gramaticală conţine un predicat gramatical şi numai unul, în timp ce o propoziţie logică poate avea ca suport mai multe predicate gramaticale (ca urmare a faptului că poate fi alcătuită din mai multe propoziţii gramaticale). De aici rezultă că un predicat logic poate avea ca suport lingvistic mai multe predicate gramaticale. De exemplu, predicatul logic *Funcţia* f *este continuă şi păstrează un semn constant* este exprimat cu ajutorul a două predicate gramaticale: *este continuă* şi *păstrează un semn constant*. Pentru f dată de $(x) = x^2$ definită pe R se obţine aici o propoziţie adevărată, iar pentru $f(x) = x$ se obţine o propoziţie falsă.

DISJUNCȚIA LOGICĂ ȘI CONJUNCȚIA „SAU"

Este interesant de urmărit legătura dintre operația de disjuncție logică și conjuncția *sau* din limba română. Această conjuncție prezintă o anumită ambiguitate (pe care latina o evita prin *vel* și *out*), putînd avea un caracter inclusiv (cu sensul de *cel puțin una*) sau *exclusiv* (cu sensul de *una și numai una*); pentru acest din urmă sens se obișnuiește, în vederea eliminării ambiguității, să se folosească, în locul expresiei *A sau B*, expresia *sau A, sau B*. Disjuncția logică are în vedere sensul inclusiv al lui *sau*. Astfel, disjuncția *Dreapta AB intersectează cercul C sau este paralelă cu dreapta DE* ne spune că dreapta *AB*, are cel puțin una dintre proprietățile indicate, putînd deci eventual să le aibă pe amîndouă. Uneori însă, datorită unor restricții de natură semantică, disjuncția logică primește un sens exclusiv: *Dreapta AB este tangentă la cercul C sau nu are nici un punct comun cu cercul C*. O dreaptă nu poate avea ambele proprietăți specificate: dacă este tangentă la *C*, atunci are un singur punct comun cu *C*, iar dacă nu are un punct comun cu *C*, în mod sigur nu este tangentă la *C*. În acest fel, conjuncția *sau*, deși inițial prevăzută cu un sens inclusiv, capătă, în contextul menționat, un sens exclusiv.

Atunci cînd dorim să exprimăm sensul exclusiv, iar acesta nu rezultă din natura proprietăților considerate, recurgem la dubla utilizare a lui *sau: Funcția f sau este continuă sau este crescătoare*, ceea ce se mai poate exprima și în felul următor: *Funcția f are una și numai una dintre următoarele două proprietăți: a) este continuă; b) este crescătoare*. Aici nu mai este vorba de o disjuncție logică.

Pornind de la două propoziții logice p și q, disjuncția lor este tot o propoziție logică, fie ea r. În schimb, suportul lingvistic al propoziției r nu mai poate fi o propoziție gramaticală, deoarece conține cel puțin două predicate gramaticale, unul asociat cu p, altul asociat cu q.

CAPCANELE CONJUNCȚIEI „ȘI"

O discuție asemănătoare se poate face în legătură cu relația dintre conjuncția logică și conjuncția gramaticală. Aici, un rol primordial revine conjuncției *și*, care poate lega două propoziții gramaticale, pentru a forma o frază. În logică, rolul lui *și* este preluat uneori de semnul &. Mate-

maticianul Gr. C. Moisil a analizat rolul conjuncției *și* în limba română în raport cu rolul conjuncției logice & (Gr. C. Moisil, *Asupra conjuncției „și"*, în „Omagiu lui Alexandru Rosetti la 70 de ani", Editura Academiei, București, 1965, p. 587—591), făcînd observația că în scrierea logică sînt evitate unele ambiguități pe care nu le putem ocoli într-o limbă naturală. Este vorba de utilizarea parantezelor. Astfel, un enunț ca *Ion sau Vasile și Sandu cîntă frumos* poate fi citit: fie în sensul că Sandu și unul cel puțin dintre Ion și Vasile cîntă frumos; fie în sensul că dacă Vasile și Sandu nu cîntă amîndoi frumos, atunci în mod sigur Ion cîntă frumos. Ambiguitatea nu poate fi eliminată cu mijloacele limbii române scrise, însă poate fi evitată în limba română vorbită, prin introducerea unor pauze și accente adecvate. În logică ambiguitatea este rezolvată mult mai ușor, cu ajutorul parantezelor: în prima interpretare este vorba de o acțiune atribuită lui *(x sau y) și z*, iar în a doua interpretare acțiunea este efectuată de *x sau (y și z)*. Tocmai această introducere a parantezelor conferă scrierii logice un avantaj față de limba naturală. Afirmația *x&y sau z&u sînt numere prime* prezintă o ambiguitate care se rezolvă prin introducerea unor paranteze. Cîteva lecturi (interpretări) posibile ale acestui enunț conduc la atribuirea proprietății de număr prim: fie uneia cel puțin dintre perechile de numere *(x, y)* și *(z, u)* (deci dacă numerele *x* și *y* nu sînt amîndouă prime atunci numerele *z* și *u* sînt prime), scrierea corespunzătoare fiind *(x&y) sau (z&u)*; fie numerelor *x&* ((*y sau z*) *&u* (deci *x*, *u* și cel puțin unul dintre numerele *y* și *z* sînt prime); fie numerelor ((*x&y*) *sau z*)*&u* (deci dacă *u* și *z* nu-s ambele prime, atunci *u*, *x* și *y* sînt prime).

PARANTEZE LOGICE ȘI PARANTEZE LINGVISTICE

Constatăm astfel că există momente în care ieșirea din limbajul natural devine necesară, dacă dorim ca exprimarea să aibă precizia fără de care uneori gîndirea nu se poate dezvolta. Înlocuirea lui *și* prin & se impune, deoarece în limba română nu se poate scrie *x și y și z* (ci numai *x*, *y* și *z*). Introducerea parantezelor devine și ea necesară, după cum am văzut; desigur, parantezele se folosesc și în limba română, dar cu un alt rol decît cel de aici. În limba română, un enunț care conține o paranteză trebuie să fie coerent chiar dacă se face abstracție de paranteză: *Ion (un elev silitor) merge la școală* este la fel de coerent ca și *Ion merge*

la şcoală, paranteza are numai rolul de a introduce o explicaţie auxiliară, un supliment de informaţie. În logică, rolul parantezei este cu totul altul; ea ne indică faptul că expresia dintre paranteze trebuie luată ca un tot şi arată, în acelaşi timp, ordinea de efectuare a operaţiilor logice indicate. Scrierea *x şi (y sau z)* arată că se consideră mai întîi disjuncţia logică *u* a propoziţiilor *y* şi *z*, iar apoi se efectuează conjuncţia logică a propoziţiilor *x* şi *u*. Scrierea *(x şi y) sau z* arată dimpotrivă că se consideră mai întîi conjuncţia logică *v* a propoziţiilor *x* şi *y* iar apoi se efectuează disjuncţia logică a propoziţiilor *v* şi *z*. Dacă am scrie *(Ion şi Gheorghe) sau Vasile cîntă frumos*, am obţine un enunţ incoerent, deoarece enunţul obţinut prin eliminarea textului din paranteză este incoerent. Tradusă în limbaj logic, expresia devine coerentă, deoarece paranteza îşi schimbă aici funcţia. Apare astfel o distincţie netă între funcţia lingvistică a parantezelor şi funcţia lor logică, între rolul parantezelor în limba română şi rolul lor în limbajul matematic.

Nu trebuie însă să omitem şi unele analogii între cele două tipuri de paranteze. Astfel, în limbajul matematic putem da factor comun într-o expresie ca $xy + xz$, scriind $x(y + z)$. Un fenomen asemănător apare în limba română (şi în alte limbi naturale), unde în loc de *Ion priveşte şi Ion mănîncă* putem scrie *Ion priveşte şi mănîncă*.

Operaţiile logice, prin precizia regulilor care le guvernează, dau naştere unui calcul logic pe care-l putem transfera, cu ajutorul unui program adecvat, unui calculator electronic. În acest fel, operaţiile sînt executate cu o viteză pe care mintea umană nu o poate concura.

Dar despre aceste lucruri vom mai avea prilejul să discutăm.

DOUĂ OBSESII ALE MATEMATICII: „EXISTĂ" ŞI „ORICE"

Să considerăm cîteva enunţuri matematice bine cunoscute şi altele, care nu fac parte din programele de învăţămînt, dar care nu-s mai puţin importante: a. Orice număr prim mai mare decît 2 este impar; b. Raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul său este constant; c. Într-un triunghi dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor; d. Orice număr par superior lui 2 este suma a două numere prime; e. O paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporţionale; f. Unele numere raţionale sînt numere

reale; g. Unele numere reale nu sînt numere raționale; h. Unele numere întregi sînt numere naturale; i. Dacă $a \leqslant x < y \leqslant b$, atunci $f(x) \leqslant f(y)$; j. Dacă $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$, atunci $(f(x) - f(y))(x - y) \geqslant 0$; k. Există un număr real M cu proprietatea că, de îndată ce $a \leqslant x \leqslant b$, avem $|f(x)| < M$; m. Vectorii $a_1, \ldots, a_n$ sînt liniar independenți dacă din $t_1a_1 + \ldots + t_na_n = 0$, unde $t_1, \ldots, t_n$ sînt numere reale, rezultă că $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$.

În ciuda marii lor varietăți, aceste enunțuri de aritmetică, algebră, geometrie sau analiză, cu statut de teoremă sau de definiție, au un element comun foarte important, pe care ne vom strădui să-l punem în evidență. Este vorba de faptul că fiecare dintre enunțurile considerate conține cel puțin un predicat logic, iar acest predicat, al cărui domeniu îl notăm cu D, conduce la o propoziție adevărată fie *pentru orice element din D*, fie *pentru cel puțin un element din D*. În primul caz spunem că avem o *cuantificare universală* a predicatului considerat, în al doilea caz avem o *cuantificare existențială*. Cu alte cuvinte, notînd cu $f(p)$ funcția de adevăr a propoziției p, fiind dat un predicat $P(x)$ cu domeniul D, cuantificarea universală a lui $P(x)$ constă în propoziția $s =$ *Pentru orice* x, $P(x)$, cu următoarea funcție de adevăr: $f(s) =$ *adevărat* dacă $f(P(a)) =$ *adevărat* pentru orice element a din D și $f(s) =$ *fals* în cazul contrar. Cuantificarea universală este deci de forma *Pentru orice* x, $P(x)$ sau *Oricare ar fi* x, $P(x)$ sau altă formă echivalentă, în timp ce cuantificarea existențială este de forma $s =$ *Există* x *astfel încît* $P(x)$ cu funcția de adevăr $f(s) =$ *adevărat* dacă $f(P(a)) =$ *adevărat* pentru cel puțin un a din D și $f(s) =$ $=$ *fals* în cazul contrar. Expresii de forma *Pentru orice...* sau *Oricare ar fi...* definesc *cuantificatorul universal*, notat în logică printr-un fel de A întors: $\forall$. Expresii de forma *Există...* definesc *cuantificatorul existențial*, notat printr-un fel de E întors: $\exists$.

CUANTIFICATORI CAMUFLAȚI

Înțelegerea unui enunț matematic este în bună măsură determinată de interpretarea corectă a cuantificatorilor săi logici. Uneori, ca în exemplul *a*, cuantificatorul logic este explicit formulat. Să observăm că un enunț de tipul *Pentru orice* x, $P(x)$ se mai poate exprima prin inferența *Dacă* x *este în* D, *atunci* $P(x)$ sau pur și simplu prin implicația $x \in D \Rightarrow P(x)$; deci enunțul *a* poate fi reformulat echivalent

astfel: *Dacă x este un număr prim superior lui* 2, *atunci x este un număr impar*. Un alt enunț echivalent constă în implicația x *prim* $> 2 \Rightarrow x$ *impar*. Totuși, chiar la un enunț atît de simplu ca *a*, o analiză atentă pune în evidență și un cuantificator existențial, camuflat în ideea de număr impar. Într-adevăr, explicitarea acestei idei ne obligă să reformulăm enunțul *a* în felul următor: *Pentru orice număr prim p superior lui* 2 *există un număr natural n astfel încît* $p = 2n + 1$. Explicitarea cuantificatorilor ar putea continua, prin precizarea ideii de număr prim. Cînd ne oprim? Răspunsul este determinat de situație. Dacă în demonstrarea enunțului *a* urmează să ne prevalăm explicit de definiția numărului prim, atunci va fi necesară continuarea. Exact acesta este cazul aici. Raționamentul procedează prin reducere la absurd. Să presupunem că enunțul *a* este fals; există deci un număr prim $p > 2$ și un număr natural $n > 1$ astfel încît $p = 2n$; însă aceasta înseamnă că 2 este divizor al lui p, în contradicție cu faptul că p, prin ipoteză prim, nu admite nici un divizor diferit de 1 și de p. Am folosit deci noțiunea de număr prim chiar prin definiția ei, sub forma cuantificată următoare: Numărul natural p se numește prim dacă $p > 1$ și dacă oricare ar fi numărul natural d divizor al lui p, d este egal cu 1 sau cu p (respectiv, pentru negație: Există un număr natural d diferit de 1 și de p, care este divizor al lui p).

Acum nu este greu de văzut că propoziția *d* (celebra ipoteză a lui Goldbach, despre care nu se știe încă dacă este adevărată sau falsă) comportă o analiză asemănătoare. Prin explicitarea cuantificatorilor ea devine: Pentru orice număr par n superior lui 2 există două numere prime p și q astfel încît $n = p + q$. Explicitarea cuantificatorilor poate continua prin precizarea proprietății lui p și q de a fi prime.

În ceea ce privește cuantificatorul universal implicat în enunțul *c*, el este de domeniul evidenței.

NEGAREA, ÎNTRE CORECTITUDINE ȘI COMODITATE

Limba naturală comportă o mare varietate de exprimare a universalului și a existențialului. Un exemplu de folosire a cuantificatorilor existențial și universal în absența lui *există* și *orice* este *b*, care admite următoarea transformare echivalentă: *Există un număr real* π *astfel încît, oricare ar fi cercul C, raportul dintre lungimea lui C și diametrul lui C este egal cu* π. Recunoaștem în această teoremă expresia

lungimii cercului în funcție de rază. Explicitarea pe care am efectuat-o pune în evidență caracterul universal al numărului π, un fel de numitor comun al tuturor cercurilor posibile. De avantajul acestei explicitări ne dăm seama și practic, de exemplu atunci cînd trebuie să negăm proprietatea enunțată (procedeu obișnuit în raționamentul prin reducere la absurd). Așa cum am mai observat, pentru a ne asigura de corectitudinea operației de negare trebuie în prealabil să explicităm toți cuantificatorii. Negația corectă a enunțului de mai sus este: *Oricare ar fi numărul real x, există un cerc C_x astfel încît raportul dintre lungimea lui C_x și diametrul lui C_x să fie diferit de x.* Schimbarea notației a fost cerută de deosebirea de situație. Fiind vorba de un număr real *oarecare*, era natural să-l notăm cu x, în nici un caz nu *mai puteam păstra notația* π, această literă grecească fiind prin tradiție utilizată pentru desemnarea unui număr real bine determinat. O altă formă posibilă a negării se obține pornind de la următoarea reformulare a lui b: *Raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său este același la orice cerc.* Sub această formă, apare explicit un singur cuantificator, iar prin negație se obține: *Există două cercuri C_1 și C_2 astfel încît raportul dintre lungimea cercului și diametru are pentru C_1 altă valoare decît la C_2.* Constatăm deci că, în funcție de modul și de gradul de cuantificare, un același enunț poate fi negat în mai multe feluri, logic echivalente, dar care practic pot fi foarte diferite ca grad de comoditate într-o anumită problemă. Să presupunem, de exemplu, că avem de arătat că cosinusul nu este o funcție crescătoare pe $[0, \pi]$. Proprietatea unei funcții f de a fi crescătoare pe $[a, b]$ este definită de enunțul i, echivalent cu: *Oricare ar fi x și y, $a \leqslant x < y \leqslant b$, avem $f(x) \leqslant f(y)$.* Prin negație se obține: Există x_1 și y_1, $a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant b$, pentru care $f(x_1) > f(y_1)$. Tocmai sub această formă este comod s-o aplicăm cosinusului pe intervalul $[0, \pi]$, luînd, de exemplu, $0 < x_1 < \pi/2 < y_1 < \pi$. Într-adevăr, în acest caz avem $\cos x_1 > 0 > \cos x_2$, deoarece se știe că cosinusul este pozitiv în primul cadran și negativ în al doilea. Am fi putut proceda și altfel, logic corect, dar inutil complicat. Astfel, enunțul j constituie și el o formulare a proprietății de monotonie crescătoare a lui f pe $[a, b]$, care se explicitează prin: Oricare ar fi x și y, $a \leqslant x$, $y \leqslant b$, avem $(x - y)(f(x) - f(y)) \geqslant 0$. Prin negație se obține: Există x_1 și y_1 $a \leqslant x_1$, $y_1 \leqslant b$ pentru care expresia $(x_1 - y_1)(f(x_1) - f(y_1))$ este strict negativă. În cazul cosinusului, alegînd pe x_1 în primul cadran, iar pe y_1 în al doilea cadran, $x_1 \neq y_1$, obținem

$x_1 - y_1 < 0$, dar $f(x_1) - f(y_1) > 0$, deci produsul celor două diferențe este strict negativ. Comparînd cele două căi, este clar că prima cale a fost mai scurtă, mai economică. Să presupunem însă că ni se cere să arătăm că sinusul nu este o funcție monotonă pe $[0, \pi]$. Și în acest caz putem proceda în două feluri. Putem, de exemplu, arăta că sinusul nu este nici crescător, nici descrescător pe $[0, \pi]$. Cum arătăm ca mai sus că nu este crescător, rămîne să arătăm că nu este descrescător, deci că există x_2 și y_2, $0 \leqslant x_2 < y_2 \leqslant \pi$, pentru care $\sin x_2 < \sin y_2$. Este suficient să alegem pe x_2 și y_2 astfel încît $0 < x_2 < y_2 < \pi/2$ pentru a obține relația dorită. Putem însă formula proprietatea de monotonie fără a mai separa cazul crescător de cazul descrescător, cerînd existența unui semn (+ sau —) pe care produsul $(x - y)(f(x) - f(y))$ îl evită oricare ar fi x și y, $a \leqslant x$, $y \leqslant b$. În acest caz, negația monotoniei este: Oricare ar fi semnul s, există x_s și y_s, $a \leqslant x_s$, $y_s \leqslant b$, cu proprietatea că produsul $(x_s - y_s)(f(x_s) - f(y_s))$ are semnul s. Practic, aceasta înseamnă că pentru fiecare dintre cele două posibilități ale lui s, + și —, trebuie găsită o pereche $\langle x_1, y_1 \rangle$, respectiv $\langle x_2, y_2 \rangle$ pentru care produsul considerat este pozitiv, în primul caz și negativ în al doilea.

EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

În matematică, aceste două fenomene trebuie separate cu grijă, atît în definiții cît și în teoreme. Să ne referim mai întîi la exemplele analizate în paragraful anterior. În formularea explicit cuantificată a enunțului b, cuantificatorul existențial poate fi precizat în felul următor: Există un număr real π și *numai unul* astfel încît... Această unicitate este o consecință logică a existenței unui număr cu proprietatea indicată. Alteori, însă, existențialul se asociază cu o pluralitate de posibilități. Astfel, în enunțul d se afirmă că pentru orice număr par $2n$ există două numere prime p și r pentru care $2n = p + r$. Nu este greu de văzut că, în general, numerele prime p și r nu sînt unic determinate; avem $10 = 3 + 7 = 5 + 5$. La fel, în negarea lui i, existența unei perechi x_1, y_1 pentru care $a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant b$ și $f(x_1) > f(y_1)$ nu este, în general, însoțită de unicitate, cum se observă chiar pe exemplul analizat al cosinusului (în afară de alegerea specificată în paragraful anterior mai putem alege $\pi/2 < x_1 < y_1 < \pi$, pentru care de asemenea vom avea $f(x_1) > f(y_1)$). Aceeași neunicitate apare și în

cazul negării enunțului j. De multe ori unicitatea este pur și simplu exclusă. Astfel, în enunțul k, exprimînd proprietatea de mărginire a funcției f pe $[a, b]$, existența lui M este asociată cu o infinitate de posibilități pentru valoarea sa, deoarece dacă M are proprietatea indicată, atunci orice număr care-l majorează o va avea de asemenea. Să considerăm acum exemplul m, unde avem a face cu un enunț care, prin explicitarea cuantificatorilor, devine: Vectorii $a_1, \ldots, a_n$ sînt liniar independenți dacă oricare ar fi numerele reale $t_1, \ldots, t_n$ cu proprietatea $t_1a_1 + \ldots + t_n a_n = 0$, rezultă $t_1 = \ldots = t_n = 0$. Prin negare, obținem: Vectorii $a_1, \ldots, a_n$ sînt liniar dependenți dacă există n numere reale $t_1, \ldots, t_n$ și există i, $1 \leqslant i \leqslant n$ cu proprietatea că t_i este diferit de zero, astfel încît $t_1a_1 + \ldots + t_n a_n = 0$. Șirul finit $t_1, \ldots, t_n$ care intervine aici nu este în general unic determinat. Să presupunem însă că vectorii a și b alcătuiesc o bază pentru spațiul vectorial al vectorilor liberi din plan (a se vedea manualul de geometrie analitică de clasa a XI-a, ediția 1985, p. 16—17). Aceasta înseamnă că a și b sînt liniar independenți și că, în plus, orice alt vector c din plan este o combinație liniară de a și b. Sub formă cuantificată, această din urmă proprietate se exprimă în modul următor: Oricare ar fi vectorul c din plan, există două numere reale t_1 și t_2 dintre care cel puțin unul este diferit de zero, astfel încît $c = t_1a + t_2b$. Nu este greu de văzut că existența se asociază aici cu unicitatea. Într-adevăr, dacă am avea și $c = u_1a + u_2b$, atunci am avea $t_1a + t_2b = u_1a + u_2b$, deci $(t_1 - u_1)a + (t_2 - u_2)\,b = 0$, de unde, în virtutea independenței liniare a vectorilor a și b (care, prin ipoteză, formează o bază), am deduce $t_1 - u_1 = t_2 - u_2 = 0$ deci $t_1 = u_1$ și $t_2 = u_2$. Cu alte cuvinte, orice vector din plan se reprezintă *într-un singur fel* ca o combinație liniară a vectorilor a și b.

În matematică, problemele de existență sînt de obicei separate de cele de unicitate. Existența fără obligația unicității se exprimă uneori prin expresii de forma *Există cel puțin un element cu proprietatea...* Desigur, există și cazuri în care se cere chiar precizarea numărului de elemente care satisfac o anumită proprietate. Astfel, teorema fundamentală a algebrei afirmă că orice ecuație algebrică admite cel puțin o soluție în corpul numerelor complexe, dar apoi se precizează că numărul soluțiilor este egal cu gradul ecuației.

Să analizăm acum exemplul *e*. Aici se ascund trei cuantificatori universali. Într-adevăr, forma explicită a enunțului *e* este următoarea: Pentru orice triunghi *ABC*, pentru orice latură a sa și pentru orice paralelă la această latură segmentele determinate pe celelalte două laturi sînt proporționale. Recunoaștem aici o celebră teoremă a lui Tales. Primul cuantificator universal are drept domeniu mulțimea (infinită) a tuturor triunghiurilor din plan. Domeniul celui de al doilea cuantificator universal este finit, mai precis, este format din trei elemente: cele trei laturi ale triunghiului *ABC*. Cel de al treilea cuantificator universal are drept domeniu (infinit) mulțimea tuturor paralelelor la una sau alta dintre laturile triunghiului. Pentru un cuantificator universal pe un domeniu finit există două posibilități. Prima posibilitate este aceea în care fiecare element al domeniului este discutat separat; așa s-a întîmplat în paragraful anterior, unde intervenea, în legătură cu proprietatea de monotonie, un cuantificator universal avînd drept domeniu o mulțime formată din numai două elemente: + și —. A doua posibilitate este aceea cu care sîntem confruntați acum și în care nu este necesar să discutăm separat fiecare dintre cele trei elemente ale domeniului, deoarece, fiind vorba de un triunghi oarecare, oricare dintre laturi prezintă aceeași situație; va trebui numai să fim atenți să nu introducem în raționament unele particularități ale figurii pe care întîmplător o folosim ca suport intuitiv. În matematică trebuie să știm să vedem generalul prin intermediul individualului.

Ultima posibilitate relativă la un cuantificator universal cu domeniu finit ne sugerează și modul în care trebuie să procedăm în cazul cuantificatorilor universali cu domeniu infinit. Dacă ar trebui să procedăm separat pentru fiecare element al domeniului, atunci verificarea enunțului nu s-ar încheia niciodată. Cum depășim această dificultate? Prin considerarea a ceea ce se numește de obicei un *element generic* al domeniului. Nu putem lua separat fiecare triunghi, dar putem raționa pe un triunghi generic. S-ar putea obiecta că așa ceva nu există; orice triunghi prezintă anumite particularități, care-l disting de alte triunghiuri. Intervine însă puterea noastră de abstracție și generalizare, datorită căreia reținem dintr-un triunghi numai ceea ce el are comun cu toate celelalte triunghiuri. Vom avea deci grijă ca raționamentul nostru să nu depindă de particularități ca existența unui unghi neascuțit, egalitatea unora dintre unghiuri

sau unora dintre laturi etc. La nevoie, vom discuta separat cele cîteva situații posibile. Observații asemănătoare sînt valabile în ceea ce privește cuantificatorul universal avînd ca domeniu mulțimea paralelelor la una dintre laturile triunghiului. Este clar că și aici putem organiza discuția într-un număr finit de etape; de exemplu, putem considera întîi cazul în care paralela la o latură intersectează celelalte laturi, apoi cazul în care ea intersectează prelungirile lor.

O situație interesantă o prezintă cuantificatorii universali avînd ca domeniu mulțimea numerelor naturale. Acești cuantificatori intervin frecvent în analiza matematică și în demonstrațiile care procedează prin inducție completă. De fiecare dată se raționează, în a doua etapă a inducției, asupra unui termen generic, de indice n, al șirului în discuție. Desigur, și aici se poate întîmpla să fie necesară distingerea cîtorva cazuri, de exemplu o discuție în funcție de paritatea lui n.

Nu trebuie să ascundem faptul că, dacă în situațiile considerate mai sus analiza cuantificatorilor universali comportă o descompunere a domeniului lor într-un număr mic (2 sau 3) de subdomenii, în alte cazuri numărul de subdomenii în care trebuie descompus domeniul inițial este mai mare, iar uneori este atît de mare încît pune la grea încercare chiar cele mai puternice calculatoare existente. Ne gîndim la problema celor patru culori, la problema clasificării grupurilor finite simple. În orice caz, posibilitatea de a folosi, în demonstrațiile matematice, și calculatorul electronic extinde considerabil capacitatea noastră de a controla cuantificatorii universali; în același timp, însă, există încă multe enunțuri conținînd cuantificatori universali cu domeniu finit, dar atît de mare încît enunțurile respective rămîn dincolo de raza de acțiune a celor mai puternice calculatoare existente, atît în ceea ce privește memoria, cît și din punctul de vedere al vitezei de calcul.

CUANTIFICATORII EXISTENȚIALI PROVOACĂ IMAGINAȚIA

Dacă un enunț cum e c nu comportă nici un act special de imaginație, ci o simplă verificare a teoremei lui Pitagora, alta este situația în enunțurile care conțin cuantificatori existențiali. Mai întîi să observăm cazul frecvent al operatorilor existențiali introduși prin alți termeni decît *există*. Astfel, în enunțul f operatorul existențial este introdus prin *unele*, la fel întîmplîndu-se în g și h. Forma explicită

a acestor enunțuri este următoarea: f. Există numere raționale care sînt numere reale; g. Există numere reale care nu sînt numere raționale; h. Există numere întregi care sînt numere naturale. Dacă adevărul enunțurilor g și h nu pune nici un fel de probleme, enunțul f poate deruta. Într-adevăr, el poate da impresia că ar exista și numere raționale care nu sînt numere reale, fapt fals, după cum se știe. Cuantificatorul *unii*... prezintă în limba naturală o ambiguitate semantică, el poate fi interpretat fie în sensul că domeniul cuantificatorului este nevid, fie în sensul că domeniul complementar este nevid. În matematică și în logică însă numai prima posibilitate este reținută. Rezultă că enunțul f este corect, chiar dacă nefericit, în sensul că afirmă mai puțin decît se întîmplă în realitate.

Dacă în exemplele de mai sus inițiativa necesară pentru testarea cuantificatorilor existențiali este derizorie, în altele această inițiativă este departe de a fi neglijabilă. Vom ilustra o atare situație prin referire la una dintre cele mai delicate noțiuni de analiză matematică, aceea de *continuitate uniformă*, cu ajutorul căreia demonstrăm că orice funcție reală f, continuă pe un interval închis și mărginit $[a, b]$, este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

Să amintim că fiind dată o funcție $f: I \to \mathbf{R}$, unde I este un interval oarecare din $\mathbf{R}$, f este uniform-continuă pe I dacă pentru fiecare număr pozitiv ε există un număr pozitiv δ_ε astfel încît oricare ar fi x și y în I, cu proprietatea $|x - y| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. În mod intenționat am formulat proprietatea de continuitate uniformă avînd grijă să punem în evidență toți cuantificatorii universali și existențiali care intervin, pentru ca în acest fel să putem formula acum într-un mod afirmativ ce anume ar însemna faptul că f nu este uniform-continuă pe I. Obținem următorul enunț: Există un număr strict pozitiv ε_0 astfel încît, oricare ar fi numărul strict pozitiv δ, există în I două puncte x_δ și y_δ cu proprietatea $|x_\delta - y_\delta| < \delta$, dar $|f(x_\delta) - (y_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$.

Să ne propunem acum să testăm, pe baza formulărilor de mai sus, uniformitatea (sau neuniformitatea) continuității funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde $f(x) = x^2$ pentru orice x din $\mathbf{R}$. Putem proceda în două feluri; fie să încercăm să testăm uniformitatea, fie să ne îndreptăm atenția asupra eventualei neuniformități. O atare alegere se face în funcție de bănuiala pe care o avem. Însă oricare ar fi bănuiala noastră, nu scăpăm de capcanele cuantificatorului existențial.

Să încercăm să testăm proprietatea de neuniformitate a continuității. Este nevoie de o oarecare imaginație pentru

a-l găsi pe ε_0. Să presupunem că $x < y$. Forma funcției f ne sugerează să încercăm să alegem pe x și pe y sub forma $x = 1/h$, $y = h + 1/h$. Într-adevăr, prin scăderea pătratelor lui y și x se va produce o simplificare; vom obține $y^2 - x^2 = (h + 1/h)^2 - (1/h)^2 = h^2 + 2 + 1/h^2 - 1/h^2 = h^2 + 2$, cu alte cuvinte, *indiferent de valoarea pozitivă a lui h, expresia* $|f(x) - f(y)| = x^2 - y^2$ *nu coboară sub* 2. Această situație ne sugerează că 2 ar putea juca rolul lui ε_0. Într-adevăr, avem $|x^2 - y^2| \geqslant 2$ independent de poziția lui x și y în $\mathbf{R}$, dar de forma de mai sus, ceea ce este mult mai mult decît aveam nevoie pentru stabilirea neuniformității continuității, deoarece h poate fi orice număr pozitiv, deci în particular inferior lui δ.

GENERIC ȘI EXISTENȚIAL

Cuantificatorii logici intervin nu numai în matematică ci și în limbajul cotidian. Însă aici ei se ascund chiar mai bine decît în matematică. Să ne referim, de exemplu, la următoarele două enunțuri: A. *Pisicile sînt inteligente.* B. *Pisicile au mîncat carnea din pivniță.* În enunțul A se ascunde cuantificatorul universal. Este clar că avem în vedere un atribut al speciei, nu al unui anumit individ al ei. Situația ar fi rămas aceeași dacă am fi folosit singularul. Enunțul C: *Pisica este inteligentă* comunică aceeași informație ca și enunțul A. Este vorba de o pisică generică, un exemplar oarecare al speciei respective. Față de acest caracter generic al enunțurilor A și C, enunțul B contrastează prin caracterul său evenimențial. Într-adevăr, acest enunț ne comunică un eveniment constînd în faptul că niște pisici anume, într-o perioadă anume, au mîncat carnea aflată într-o anume pivniță. Nu mai este deci vorba de un cuantificator universal. Să rezumăm deci. Enunțurile A și C revin la enunțul *Orice pisică este inteligentă* sau la enunțul atenuat *Cele mai multe pisici sînt inteligente* sau măcar la *Unele pisici sînt inteligente.* O situație asemănătoare are loc în cazul unui enunț ca *Omul este o ființă inteligentă,* care nu trebuie neapărat interpretat printr-o cuantificare universală de tipul *Toți oamenii sînt inteligenți,* ci în sensul că *Cei mai mulți oameni sînt inteligenți* sau măcar *Unii oameni sînt inteligenți.* Alta este situația unui enunț de tipul *Omul este muritor,* perfect echivalent cu *Toți oamenii sînt muritori.* Însă în toate cazurile considerate este vorba de enunțuri cu caracter generic, în contrast cu enunțul eveni-

mențial *Pisica a mîncat carnea din pivniță*, unde se ascunde un cuantificator existențial.

Am considerat aceste cîteva exemple pentru a da o idee despre complexitatea problemei cuantificatorilor logici în limbajul natural și despre natura relațiilor dintre cuantificatorii logici și cei lingvistici.

NU DUCEM LIPSĂ DE TALENTE

Este o bucurie, pentru cei care fac educația matematică a tineretului, să constate cît de multe talente apar, elevi și studenți care se îndreaptă aproape spontan spre matematică, investesc în ea pasiune și inteligență. Cum îi recunoaștem? Cum le întreținem și le dezvoltăm interesul pentru matematică? Spre ce fel de matematică îi orientăm? Ce facem pentru ca ei să nu se plictisească în timp ce colegii lor fac efortul de a înțelege ceea ce ei de mult au înțeles?

În primele decenii ale secolului nostru, tendința dominantă printre elevii talentați la matematică era preocuparea de geometrie elementară. Paginile „Gazetei Matematice" stau mărturie pentru aceasta. Nu întîmplător Gheorghe Țițeica și Traian Lalescu au publicat lucrări dedicate geometriei elementare, deși cercetările științifice pe care ei le-au efectuat și pentru care și-au căpătat un loc de onoare în istoria matematicii se refereau la domenii de matematică superioară (în special, geometria diferențială pentru Țițeica și teoria ecuațiilor integrale pentru Lalescu). În ceea ce-l privește pe Dan Barbilian (poetul Ion Barbu), pasiunea sa pentru geometria elementară a rămas statornică de-a lungul întregii vieți, cum se poate vedea și din cele două volume de *Pagini inedite* publicate postum la Editura Albatros.

Însă orizontul cultural și răspunderea socială a matematicii erau în urmă cu 50 de ani incomparabil mai restrînse decît azi. Așa se și explică faptul că interesul, în întreaga lume, pentru orientarea celor talentați la matematică este mult mai mare decît în trecut. Cercurile de matematică, sesiunile de comunicări, olimpiadele, balcaniadele, concursurile profesional-științifice de matematică ale studenților converg, toate, spre unul și același scop: stimularea și cultivarea talentelor.

Literatura de specialitate publicată la noi în ultimii zece ani include destule lucrări adresate „vîrfurilor". În 1978 a fost publicată la Editura Tehnică versiunea în limba

română a lucrării *Olimpiadele internaționale de matematică* de E.A. Morozova, I.S. Petrakov și V.A. Skvorțov. În această lucrare sînt prezentate problemele propuse la primele 12 olimpiade internaționale de matematică; începînd cu anul 1959, cînd a avut loc prima olimpiadă de acest fel (în România). Alte zece olimpiade internaționale de matematică (începînd cu anul 1973) sînt prezentate de profesorul Ion Cuculescu în lucrarea *Olimpiadele internaționale de matematică ale elevilor* (Editura Tehnică, 1984). Am dori să insistăm asupra acestei cărți de excepție, deoarece, în inflația de culegeri de probleme care pretind că-i ajută pe candidații la tot felul de concursuri și examene, uneori se creează o confuzie a valorilor și nu totdeauna cîștigă cele mai bune.

STILUL CUCULESCU

Departe de a fi o compilație, cum atîtea culegeri sînt, cartea profesorului Cuculescu este, cum se spune, o lucrare de autor, una din rarele lucrări care ne introduc în gîndirea matematică propriu-zisă, cu ezitările și căutările ei, cu alegerile și renunțările inerente în fața necunoscutului. Matematica nu apare aici ca un produs finit, gata elaborat, ci împreună cu procesul intelectual care i se asociază. Spre deosebire de cartea anterioară menționată mai sus, dedicată aceleiași teme, unde problemele cu soluțiile lor au fost pur și simplu colecționate de la conducătorii delegațiilor țărilor participante, cartea de față poartă marca autorului, are un stil inconfundabil, pe care-l putem numi *stilul Cuculescu*. Semnificativă este, în această privință, mărturia pe care chiar autorul o face în Prefața cărții sale: „Soluțiile ce le prezentăm nu sînt totdeauna cele ale propunătorilor ci, de regulă, cele găsite de autorul cărții în cursul lucrărilor juriului." De fapt, autorul procedează mult mai democratic, prezentînd de multe ori, la o aceeași problemă, mai multe soluții (inclusiv cele venind de la propunători, de la alți membri ai juriului, de la concurenți) și însoțindu-le de comentariile de rigoare. Dar Ion Cuculescu merge și mai departe, introducîndu-ne în laboratorul de lucru al juriului fiecărei olimpiade internaționale de matematică și făcîndu-ne participanți la geneza unor probleme, atunci cînd varianta propusă juriului trebuia modificată. Un caz tipic este cel al problemei: „Fie A suma cifrelor numărului 16 la puterea 16 și fie B suma cifrelor lui A. Să se afle suma cifrelor lui B, fără a se calcula 16 la puterea 16. Se lucrează numai cu

sistemul zecimal de scriere". S-a obiectat că „fără a calcula pe 16 la puterea 16" este o condiție ce poate deruta pe concurenți. Șeful uneia dintre delegații a atras atenția că pentru concurenții din țara sa calculul lui 16 la puterea 16 n-ar dura decît un sfert de oră, ceea ce ar fi contrar spiritului Olimpiadei. Trebuia deci înlocuit acest număr cu altul. Ion Cuculescu ne prezintă (la p. 104 a cărții sale) considerentele care au condus juriul la înlocuirea lui 16 la puterea 16 cu 4444 la puterea 4444.

În legătură cu participarea la olimpiade sînt valabile, în esență, aceleași principii ca și la diferitele examene și concursuri de matematică de-a lungul anilor de școlaritate și studenție. Dacă însă la examenele și concursurile obișnuite, destinate masei de elevi sau studenți, problemele propuse au un caracter oarecum standard, care permite rezolvarea lor pe baza cunoașterii temeinice a materiei și a unui antrenament corespunzător, alta este situația olimpiadelor de matematică și cu atît mai mult a celor internaționale. Aici, partea de rutină este redusă la minimum. Accentul nu cade pe cunoștințe (deși bogăția lor este extrem de bine venită), ci pe inițiativa personală, pe o asociație fericită de idei, care trebuie să te viziteze pe parcursul celor cîteva ore care constituie durata unei probe. S-a discutat mult dacă o atare situație este compatibilă cu natura activității matematice, a activității de cercetare în general. „Matematica nu se face în stare de urgență", ne previne și Ion Cuculescu.

MATEMATICA LA CRONOMETRU?

Nu sînt puțini tinerii talentați la matematică, dar care nu dau randament la olimpiade și concursuri. Unul dintre ei, un valoros student al Facultății de Matematică, autor de pe acum al unor rezultate originale, mi-a declarat fără ocol: „Nu-mi place matematica pusă la cronometru!" În sprijinul acestei atitudini se situează mărturiile unor matematicieni de seamă, ca Henri Poincaré și Jacques Hadamard, care accentuează caracterul imprevizibil al invenției matematice. Ore întregi de reflecție în fața foii de hîrtie se pot dovedi sterile, pentru ca ideea mult așteptată să țîșnească ulterior, într-o împrejurare fără nici o legătură cu problema care ne frămîntă. În această privință, este de multe ori menționată celebra descoperire a funcțiilor fuchsiene, de către Henri Poincaré, care voia să le găsească o expresie

sub forma raportului a două serii, pe baza unei analogii cu funcțiile eliptice, dar căutările se dovedeau infructuoase. Și iată cum a venit soluția, chiar în relatarea lui Poincaré: „Plecam din orașul Caen, unde locuiam, pentru a participa la o excursie geologică. Întîmplările călătoriei m-au făcut să uit cu totul de preocupările mele matematice. Tocmai sosisem la Coutances, unde urma să ne suim într-un omnibus. În momentul în care am pus piciorul pe scara omnibusului am avut brusc revelația faptului că transformările pe care le utilizasem pentru a defini funcțiile fuchsiene erau identice cu cele ale geometriei neeuclidiene. Nu puteam verifica în acel moment dacă lucrurile stau într-adevăr așa, însă imediat după întoarcerea la Caen m-am convins că totul este corect". Tot Poincaré relatează o altă întîmplare, asemănătoare: „Mă preocupau unele chestiuni de natură aritmetică, dar nu reușeam deloc să le lămuresc. Dezgustat de insucces, m-am dus pentru cîteva zile la mare, preocupat de cu totul alte lucruri. Într-o dimineață însă, plimbîndu-mă pe faleză, m-a fulgerat ideea că transformările aritmetice ale formelor pătratice ternare nedefinite sînt identice cu cele ale geometriei neeuclidiene".

Ce putem spune pe marginea acestor mărturii ale unuia dintre cei mai mari matematicieni din ultima sută de ani? Desigur, și unui concurent la olimpiadă i se poate întîmpla să găsească soluția problemei abia a doua zi, de exemplu chiar în clipa în care se trezește. Jacques Hadamard, un alt mare matematician francez (din prima jumătate a secolului nostru), relatează că, trezit odată brusc din somn de un zgomot extern, i-a apărut soluția unei probleme care-l preocupa de multă vreme. Problemele de olimpiadă sînt de obicei inedite și îl aduc pe candidat în imediata apropiere a activității de cercetare. După părerea lui Ion Cuculescu, o problemă de olimpiadă generează reacții de tipul următor: a) nu știu, b) să mă gîndesc, c) am găsit ideea, d) să redactez corect și complet. Însă după d) poate urma c') m-am înșelat! c'') să perfecționez sau chiar b') să caut altă cale. În mod special atrage atenția următoarea observație a lui Ion Cuculescu: Dacă în loc de b) apare b'') să-mi aduc aminte, atunci am ieșit din spiritul Olimpiadei de Matematică.

ÎN ABSENȚA IMAGINAȚIEI, ESTE SUPRALICITATĂ MEMORIA

Să încercăm să desprindem semnificația acestei ultime observații. Psihologia celor care se prezintă la un examen este dominată de grija de a-și aminti ceea ce au învățat. Mai toți cei care eșuează la un examen invocă o carență a memoriei, mai nimeni nu recunoaște că n-a înțeles o anumită idee, un raționament, un concept, o metodă. De fapt, rolul memoriei în procesul de învățare a matematicii este mult mai mic decît se crede. Față de cele vreo 50 de teoreme care trebuie învățate pentru un examen, demonstrațiile respective se repartizează la mai puțin de vreo zece tipuri. Conceptele și teoremele se clasifică și ele pe baza unor analogii. Raționamentul analogic este unul dintre cele mai puternice instrumente ale gîndirii matematice. Din păcate, el este folosit în învățămînt într-o măsură prea mică. Însă orice economie de analogii trebuie compensată printr-un efort suplimentar de memorie. Dacă, de exemplu, nu ne-am prevalat de faptul că teorema lui Rolle și proprietatea lui Darboux a derivatei se stabilesc pe o cale foarte asemănătoare, atunci va trebui să învățăm demonstrațiile acestor două fapte matematice ca două demonstrații distincte, deci efortul de memorie pe care-l vom depune va fi aproape dublu. Cel care nu este antrenat în desfășurarea unui efort de imaginație, caută să compenseze aceasta printr-un efort de memorie. Tocmai această situație caută s-o evite olimpiadele de matematică. Cunoștințele cerute concurenților sînt minime, deoarece trebuie să existe certitudinea că ele au fost parcurse de toți concurenții, indiferent de școala de la care provin. Însă acest caracter relativ elementar al problemelor se asociază cu un grad de dificultate ridicat, care se manifestă prin faptul că problemele nu seamănă prea mult cu nici una dintre problemele cunoscute din cărțile standard. Concurentul la olimpiadă trebuie să se bazeze în primul rînd pe inițiativa și imaginația sa și numai în al doilea rînd pe cunoștințele sale.

ȘTIINȚA ȘI ARTA DE A ÎNTREBA

Față de aceste exigențe, alegerea problemelor propuse concurenților trebuie făcută cu deosebită grijă. Ion Cuculescu nu se mulțumește (în cartea sa menționată mai sus) să prezinte problemele propuse efectiv concurenților, ci ia în discuție ansamblul problemelor propuse juriului și ex-

plică detaliat considerentele care au condus la alegerea anumitor probleme și nu a altora, în funcție de gradul lor de dificultate, cunoștințele presupuse, eventuale ambiguități în formulare, varietatea tematică a problemelor, varietatea tipurilor de raționament cerute pentru rezolvare etc. Ne aflăm astfel pentru prima oară în fața unei cărți de matematică din care se poate învăța nu numai cum se rezolvă o problemă, ci și cum se alcătuiește o problemă. Nu este oare întrebarea cel puțin la fel de importantă ca și răspunsul? Știința și arta de a întreba sînt chiar mai dificile decît știința și arta de a răspunde, deoarece răspunsul este în mare măsură ghidat de modul de formulare a întrebării. Iscusința lui Socrate de a-l conduce pe interlocutor la descoperirea adevărului, printr-un șir de întrebări adecvate, a rămas un model de atitudine creatoare în învățare. Interlocutorul este astfel provocat la un efort fără de care descoperirea nu este posibilă, iar învățarea fără descoperire nu este eficientă, pentru a nu mai vorbi de faptul că descoperirea prin propriile forțe este și recompensa (intelectuală) care răsplătește efortul și care stimulează la depunerea unor noi eforturi. Este de aceea important să ne învățăm să formulăm nedumeririle noastre, să le explicităm sub forma de întrebări precise. Întrebarea este forma elementară a creativității, cu ea începe orice act de inteligență. Este regretabil faptul că unii elevi își cenzurează întrebările, de teamă că acestea ar putea fi considerate un act de indisciplină. Din păcate, unii profesori stimulează această atitudine, prin reacția nervoasă la unele întrebări și prin faptul că nu acordă acestora atenția cuvenită. Alteori, elevii se abțin să întrebe de teama de a nu se face de rîs. Mi s-a întîmplat de multe ori să constat că profesorul folosește cuvinte pe care mulți elevi nu le înțeleg, dar nici unul dintre aceștia nu cere explicația de rigoare. Întrebarea nu e lucru de rușine! Iată un adevăr care ar trebui repetat mereu, deoarece fără capacitatea de a întreba, fără știința și arta întrebării, omul este condamnat la ignoranță și lene. Progresul cunoașterii nu atrage cu sine o reducere a numărului de întrebări, ci o creștere vertiginoasă a acestuia. Multe întrebări rămîn vreme îndelungată fără răspuns, iar altele comportă o infinitate de răspunsuri, nici unul definitiv. Există un adevărat snobism al abținerii de la întrebare, un snobism practicat în multe întîlniri de societate de către cei care preferă să rămînă toată viața ignoranți decît să-și facă publică necunoașterea unui anumit fapt. Se ajunge astfel la un fenomen paradoxal: cei care întreabă sînt, de cele mai multe ori,

exact cei mai instruiți și mai inteligenți. La orele de consultații vin și sînt activi cu precădere studenții foarte buni, iar în discuțiile de societate cei care nu se sfiesc să ceară o explicație privind semnificația unui cuvînt, de exemplu, sînt tocmai cei care și-au însușit o cultură vastă și practică un exercițiu continuu al inteligenței.

CUM ARATĂ O PROBLEMĂ DE OLIMPIADĂ

Problemele propuse la olimpiadele internaționale sînt din domeniul aritmeticii, algebrei și geometriei. Analiza nu este luată în considerare, deoarece ea nu constituie materie de învățămînt liceal în toate țările participante. Iată cîteva mostre de probleme: 1) Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale a pentru care $n^4 + a$ nu este prim pentru nici un n natural. 2) Să se demonstreze că în orice tetraedru există un vîrf astfel încît cu cele trei muchii ce pleacă din el să se poată construi un triunghi ce le are ca laturi. 3) Fie $P(x)$ un polinom cu coeficienți întregi, al cărui grad, notat deg P, este mai mare sau egal cu 1. Fie $n(P)$ numărul tuturor întregilor k pentru care $(P(k))^2 = 1$. Să se demonstreze că diferența $n(P) - \deg P$ nu întrece pe 2. 4) Să se determine cel mai mare număr care este produsul unor numere întregi pozitive, a căror sumă este 1 976. 5) Este adevărat că orice poligon regulat plan cu un număr par de laturi se poate descompune într-un număr finit de romburi? 6) Să se determine, dacă există, acele sisteme de logaritmi în care se poate întîmpla ca un număr real pozitiv să fie egal cu logaritmul său.

Această selecție este suficientă, credem, pentru a da o idee despre natura nestandard și gradul de dificultate pe care le prezintă chestiunile propuse la o olimpiadă internațională de matematică. La cele mai multe probleme de acest fel, prima reacție este de nedumerire în fața unui lucru nou. Ele se constituie ca o provocare adresată inteligenței noastre, ne stimulează ambiția de a ne încerca puterile minții. De cele mai multe ori, chiar punctul de plecare este misterios, problema se prezintă ca un mosor de ață, căruia nu i se vede capătul. Spre deosebire de problemele de rutină adresate masei de elevi, probleme care (cu excepția eventuală a celor de geometrie) comportă de obicei unele calcule și relativ puțin raționament exprimat în cuvinte, problemele de tipul celor ilustrate mai sus sînt dominate de aspecte calitative. Tratarea lor impune o argumentare

bogată, în care calculele nu depășesc de obicei 50% din text. Nu vom prezenta aici o atare soluție, deoarece toate problemele sînt discutate pe larg de către Ion Cuculescu, în cartea sa. Autorul nu se mulțumește să prezinte sec soluțiile, ci își motivează alegerile și strategia, compară diferite soluții posibile, discută avantajele și dezavantajele fiecăreia. Totul decurge într-o atmosferă deschisă, în care rămîne loc, din cînd în cînd, și pentru cîte o glumă. În acest fel, raționamentul matematic se umanizează, iar ceea ce părea inițial inaccesibil unei inteligențe mijlocii devine normal și chiar familiar.

PUTEM MĂSURA PERFORMANȚA MATEMATICĂ?

O latură deosebit de interesantă a cărții lui Ion Cuculescu o constituie discutarea punctajului pe baza căruia au fost notate soluțiile problemelor. Ca și la concursurile de admitere în învățămîntul superior, și aici se alcătuiesc baremuri care prevăd cîte puncte se acordă pentru fiecare parte a unei probleme. Cu privire la alcătuirea acestor baremuri au loc de multe ori discuții aprinse, deoarece ele presupun o cuantificare a diferitelor părți ale soluției unei probleme, cu aprecierea ponderii pe care o prezintă fiecare parte în ansamblul soluției. Aici însă intervin mai multe dificultăți. În primul rînd o aceeași problemă comportă diferite soluții și de multe ori unii candidați prezintă soluții diferite de cele avute în vedere de comisia (juriul) de concurs. În al doilea rînd — și acesta este impedimentul principal —, baremul este stabilit în ipoteza că o componentă sau alta a soluției este ireproșabilă, în timp ce soluția efectivă propusă de un concurent prezintă deficiențe de o mare varietate, care depășesc de departe previziunile comisiei (juriului): calcule incomplete, raționamente inutil complicate, motivări insuficiente ale unor pași, greșeli mai mult sau mai puțin minore de calcul, redactare neglijentă etc. O chestiune care creează de multe ori discuții contradictorii între membrii comisiei este modul de apreciere a afirmațiilor greșite sau fără sens. Unii consideră că o lucrare de concurs trebuie apreciată exclusiv în raport cu ceea ce ea conține corect, alții sînt de părere că greșelile și nonsensurile trebuie penalizate indiferent de faptul dacă, concomitent, concurentul a propus și o abordare corectă. Dar greșelile de gramatică sau de ortografie, anacoluturile, frazele fără șir trebuie penalizate și în ce măsură?

Profanii sînt de multe ori miraţi aflînd că stabilirea punctajului în cazul unor probleme de matematică poate fi o operaţie atît de controversată. Însă pentru stabilirea gradului de gravitate a unei greşeli de calcul, a unei lacune într-un raţionament, a unei complicări inutile a unui demers nu s-a elaborat (încă?) o metodologie riguroasă şi poate că nu se va elabora niciodată. Abaterile de la o tratare ireproşabilă a unei probleme de matematică admit o infinitate de variante, pe care nimeni nu le poate evalua şi ierarhiza.

ESTE MATEMATICA DE NATURĂ COMPETITIVĂ?

Dificultăţi similare apar în ceea ce priveşte ierarhizarea celor mai bune soluţii, ierarhizare impusă de necesitatea (?) de a se acorda premiul întîi, premiul al doilea, premiul al treilea etc. Ion Cuculescu prezintă, nu fără umor, discuţiile prilejuite de acest ritual al olimpiadelor. Termenul de olimpiadă are o rezonanţă sportivă şi, fără îndoială, vizează o anumită analogie cu olimpiadele sportive. De la acestea din urmă, olimpiadele de matematică împrumută elemente esenţiale ca durata fixă a unor competiţii, notarea rezultatelor pe baza unui punctaj riguros, ierarhizarea concurenţilor etc. În această strategie se ţine seamă, fără îndoială, de tinereţea participanţilor la olimpiade, tinereţe setoasă de competiţie. Nu ar fi corect să subestimăm valoarea stimulativă a unor întreceri de acest fel, fapt confirmat şi de evoluţia ulterioară a multor dintre cîştigătorii olimpiadelor internaţionale de matematică, deveniţi matematicieni redutabili, cu rezultate deosebit de apreciate în lumea specialiştilor. Autorul cărţii discutate mai sus, Ion Cuculescu, a fost şi el, în urmă cu cîteva decenii, o vedetă a olimpiadelor naţionale de matematică (pe atunci nu existau încă olimpiade internaţionale), iar astăzi este unul dintre matematicienii noştri de frunte în domeniul teoriei probabilităţilor.

Dar, imprimînd olimpiadelor de matematică acest caracter sportiv, devin inevitabile anumite concesii, tot atîtea compromisuri faţă de natura reală a ştiinţei în general, a matematicii în special. În primul rînd, chiar necesitatea de a se putea ierarhiza concurenţii impune selectarea unor probleme de un anumit tip, ale căror soluţii se pretează la o apreciere cît mai cuantificată. Predomină problemele de natură combinatorie, iar enunţurile sînt mai degrabă de tipul *Să se arate că ...* decît de tipul: *Este adevărat că ...* ?, pentru a nu mai vorbi de faptul că problemele de modelare matema-

tică a unor fenomene, de construire a analogului, într-un anumit cadru, a unei situații dintr-un alt cadru (un singur exemplu, o problemă pe care am propus-o studenților din anul întîi: Cum ar arăta un analog pentru funcții reale ale lemei lui Cesaro de la șiruri?), posibile generalizări sau ameliorări ale unor teoreme sînt cu totul absente. Această sacrificare a unor probleme foarte apropiate de tipul celor care intervin efectiv în cercetare, dacă nu sînt chiar ele asemenea probleme, devine necesară pentru încadrarea în normele de competiție: durata fixă prestabilită (se pare că de patru ore) acordată concurenților pentru rezolvarea a trei probleme și posibilitatea măsurării cît mai riguroase a calității soluțiilor.

DE LA PROBLEME DE CONCURS LA PROBLEME PUR ȘI SIMPLU

Este adevărat că durata de rezolvare a unei probleme nu e deloc o chestiune neglijabilă; dar durata este importantă aici în ceea ce privește problemele dintr-o anumită clasă, deci are în vedere timpul de calculator pe care îl comportă un anumit algoritm. Problemele la care trebuie „să-ți dea prin gînd ceva" nu au fost niciodată rezolvate prin închiderea pe cîteva ore a unor matematicieni într-o anumită încăpere. Desigur, exercițiul de gîndire prilejuit de olimpiade sau de celelalte concursuri cu durara fixă este un bun antrenament și un elocvent test de capacitate de concentrare a atenției și efortului, de mobilizare a tuturor resurselor în vederea unui anumit scop. Dar această mentalitate competițională poate deveni nocivă dacă ea nu este echilibrată de o orientare a preocupărilor spre problemele de fond și de perspectivă ale științei. Din păcate, se observă de mai mulți ani că structura diferitelor concursuri, de la examenele de treaptă pînă la concursurile de admitere în învățămîntul superior, este determinantă pentru preocupările matematice ale celor mai mulți tineri. Discipline ca „Matematică aplicată în tehnica de calcul" sau „Elemente de calculul probabilităților și statistică matematică", deși fac parte din programa liceală de matematică, nu se află în atenția elevilor (și, într-o anumită măsură, nici a profesorilor), pentru simplul motiv că ele nu figurează în programa concursurilor de admitere în învățămîntul superior.

O privire generală asupra problemelor propuse la diferitele tipuri de concursuri, în diferite țări ale lumii, este suficientă pentru a se observa că orizontul științific și cultural al

matematicii de concurs este destul de limitat, dacă nu derizoriu. Educația matematică a tineretului are astăzi o misă mult mai importantă, pe care trebuie s-o onoreze. Pariul ei social are în vedere nevoia de matematică resimțită azi de aproape toate disciplinele. Simptomele acestei comenzi sociale sînt nenumărate, iar multe dintre ele sînt resimțite de matematicieni în relațiile lor directe cu profesioniștii altor discipline. Chiar în timp ce scriam aceste rînduri, azi, 4 mai 1986, am fost întrebat la telefon de către un cunoscut critic și teoretician al filmului, ce sînt rețelele lui Petri și unde poate citi despre ele, deoarece a aflat că acestea se aplică în studiul scenariilor de film. Oare pregătirea matematică a tineretului, în general, matematica de performanță în special, n-ar trebui să înregistreze aceste mutații? Infuzia de gîndire matematică devine o tendință tot mai accentuată în toate domeniile de activitate, iar antrenamentul în acest sens nu se poate baza numai pe exerciții de virtuozitate matematică în sine. În afară de problemele de matematică pe care le rezolvăm pentru a ne pregăti în vederea unui concurs există și probleme de matematică pe care le ridică dezvoltarea științei. Nu ar trebui asigurată o legătură și un echilibru între cele două tipuri de probleme? Nu ar trebui explicată această legătură?

PENTRU A APROFUNDA ANALIZA MATEMATICĂ

Au apărut, în ultimii ani, multe cărți care dau posibilitatea aprofundării Analizei Matematice. Adresate cu deosebire elevilor din ultimele clase și studenților, cărțile lui Gh. Siretchi, publicate începînd cu anul 1978 la Tipografia Universității din București și cărțile sale de Calcul diferențial și integral publicate în 1985 și 1986 la Editura Științifică și Enciclopedică se remarcă printr-un spirit modern și un echilibru remarcabil între teorie și aplicații. Autorul prezintă un mare număr de exerciții teoretice, o etapă intermediară foarte importantă între considerațiile generale și aplicațiile de rutină. Cîteva exemple în acest sens: Să se arate, plecînd de la definiție, că funcția $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ este integrabilă Riemann și să se calculeze integrala sa; Să se arate că funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu $f(x) = x \sin(1/x)$ dacă $x \neq 0$ și $f(0) = 0$ este uniform continuă; Șirul (x_n) unde $x_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n - \ln n$ $(n \geqslant 1)$ este convergent (către constanta lui Euler).

O carte deosebită, de un nivel ridicat, foarte utilă pentru tinerii pasionați de Analiză Matematică, este aceea a fraților gemeni Sorin Rădulescu și Marius Rădulescu (*Teoreme și probleme de Analiză Matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982). Cartea aceasta conține multe probleme nestandard, provenind din rezultate conținute în vechi memorii și articole științifice. Ceea ce în urmă cu 50, 60, 70 de ani constituia o teoremă într-un memoriu original devine de multe ori azi un exercițiu, de obicei mai greu, pentru tinerii de azi care aspiră să devină matematicieni. Într-o anumită măsură, și cărțile lui Sireţchi procedează în acest fel, extrăgînd din diferite cărți și articole mai vechi diferite teoreme, corolare, leme etc. care se metamorfozează în exerciții de performanță.

Pentru a da o idee despre tipul de probleme selecționate de frații Rădulescu, vom menționa următoarea propoziție: Limita unui șir uniform convergent pe **R** de funcții polinomiale este tot o funcție polinomială. Un rezultat de acest fel, foarte puțin cunoscut, completează în mod fericit faimoasa teoremă a lui Weierstrass, conform căreia orice funcție continuă pe un interval compact este limita unui șir uniform convergent de funcții polinomiale. Se constată astfel cît de esențială este condiția de compacitate în această teoremă; pe mulțimea **R**, care nu mai este compactă, convergența uniformă nu mai este în stare să ne scoată din clasa funcțiilor polinomiale.

E GREU SĂ DEFINIM MATEMATICA

Există la unii matematicieni o tendință de ignorare a semnificațiilor culturale ale propriului lor domeniu. Există matematicieni foarte buni, dar deficitari în înțelegerea contactului matematicii cu alte discipline, în special cu cele social-umaniste. Dar mult mai mare este numărul matematicienilor conștienți de implicațiile sociale și culturale ale matematicii.

Starea de spirit a celui care se pregătește pentru un examen nu este prielnică asimilării reale a științei; știința cere o stare psihică aparte, calmă, fără tensiuni „exterioare". E adevărat, preconizăm — cam de multă vreme — ca examenul să se pregătească tot anul, dar aceasta e situația ideală, de care se apropie deocamdată numai o parte a studenților.

Am făcut un experiment: mai demult, la examenul de analiză matematică la anul II, am permis studenților să consulte orice sursă bibliografică doresc, în pregătirea răspunsurilor la examenul oral. La început, studenții s-au bucurat, nu mai erau terorizați de teama că au uitat unele demonstrații. Pentru că, ați observat cred, la examen studentul nu spune că n-a înțeles, ci că nu-și aduce aminte. Am vrut să-i conving că deficiențele lor sînt de înțelegere, nu de memorie. Rezultatul: au realizat poate pentru prima oară ce înseamnă a învăța matematica. Au trăit pentru prima oară această experiență. Au scăpat pentru prima oară de regulile clasice ale examenului: „la examen n-ai voie să te uiți în stînga și-n dreapta, n-ai voie să consulți cărți", ș.a.m.d. — reguli cu care le întreținem falsa iluzie că *acolo* se află salvarea. La început se repezeau frenetic, cu lăcomie, la cărți, veneau la tablă, le formulam întrebările, nu puteau răspunde, se întorceau din nou la cărți, citeau și abia într-un tîrziu abandonau „biblioteca" ce-o aveau cu ei, ca să recurgă la ceea ce trebuia să constituie ipostaza inițială a reacției lor: *să gîndească*.

Avem nevoie de cursuri și seminarii cît mai „aerisite", bazate cît mai mult pe dialog, nu pe monolog, control continuu al modului în care este asimilată materia și — ceea ce mi se pare cel mai important — un accent deosebit pus pe îndrumarea personală, diferențiată, a fiecărui student în parte. În acest scop, pot fi folosite și perioadele de practică, dar este esențial să organizăm programul studenților în așa fel încît să le rămînă timp suficient pentru studiu individual. Acest lucru este cu deosebire important la anul I, pentru a atenua șocul pe care-l poate produce matematica universitară, atît de diferită încă de matematica de liceu.

Formal, structurile matematice se pot defini simplu, dar dacă tînărul nu are o suficientă experiență matematică pentru a găsi cît mai multe situații concrete care să corespundă acestor structuri, atunci înțelegerea lor este iluzorie; a înțelege o definiție nu înseamnă să înțelegi numai structura ei internă, ci și „de ce"-ul ei, de ce se introduce, de ce a apărut ca necesară, de ce așa și nu altfel. Didactica matematicii e deficitară încă la capitolul *motivațiilor*; motivația unei teoreme este altceva decît demonstrația ei. Ordinea în care e sistematizată matematica este diferită de ordinea genetică a apariției noțiunilor. Mai mult, ordinea în care noțiunile s-au dezvoltat e uneori inversă ordinii sistematice; de exemplu noțiunile *funcție — continuitate — derivabilitate — integrabilitate* sînt predate în această ordine, dar —

istoric — s-au cristalizat, în forma lor de azi, în ordine inversă. Arta predării matematicii constă în găsirea echilibrului între cele două ordini.

Există prejudecata că matematica înseamnă aptitudinea de a efectua cu mare viteză calcule, că matematica este o știință a cantităților și măsurilor, că raționamentul matematic nu e cel de care are nevoie viața practică. Ideea culturală despre matematică este de multe ori greșită, formată pe baza unei educații matematice deficitare.

Au fost multe ezitări și confuzii chiar în modul filozofic de a privi matematica; de exemplu, a fost considerată „știință a aspectelor cantitative și a raporturilor spațiale" sau „studiu deductiv al unor entități abstracte" Ambele sînt la fel de limitative, ambele ignoră unele părți și includ altele, care nu-i aparțin. E greu să definim matematica. Profesorul Moisil spunea că „matematica este partea exactă a cunoașterii umane". Apar și aici însă semne de întrebare, pentru că, de exemplu, există acum domeniul „filozofiei exacte", care folosește metode matematice. Ce este aceasta? Pentru că, pentru Moisil, această formulare ar fi o contradicție în termeni.

Dezvoltarea matematicii iese de sub incidența oricărei definiții. O putem descrie extensional și nu intensional, pentru că în matematică regăsești tot ceea ce găsești în exteriorul ei. Sînt opere matematice care demonstrează că în structura lor se află o „biologie", o „genetică", un „comportament uman", adică acele tipuri de transformări pe care le întîlnim în formele vii. Matematica se constituie ca o știință generală a evoluției formelor. Nu este suficientă sieși, deși e o expresie strălucită a rațiunii umane, ci se află într-un „metabolism" cu celelalte discipline, în care își valorifică rezultatele și din care își procură idei și probleme. De obicei, un concept își cîștigă o valoare culturală atunci cînd interesează și pe nespecialiști (ex. entropie, logaritm etc.). Dar numeroase rezultate matematice au o semnificație culturală pe care numai matematicienii o pot sesiza, după cum altele sînt sesizate mai profund de către ingineri sau biologi. Matematicianul posedă în mod virtual o anume universalitate, dacă este pus în condiție favorabilă.

Primele pagini ale unei cărți de matematică dau adesea impresia unor considerații banale. Dar, fără răbdarea de a le parcurge cu atenție, s-ar putea ca paginile imediat următoare să devină ininteligibile.

Noțiunile matematice impresionează prin polivalența lor. Cuvinte ca *sinus* și *cosinus* trimit la lucruri atît de diferite ca evaluarea elementelor unui triunghi și studiul fenomenelor periodice.

Definițiile matematice sînt așezate de obicei la începutul expunerii, deși, în procesul de descoperire, ele aparțin, de cele mai multe ori, etapei finale. Atenuarea acestei situații paradoxale constituie una din marile probleme ale pedagogiei matematice.

Pedagogia matematicii este confruntată la fiecare pas cu două tendințe complementare ale gîndirii matematice: tendința spre sistematizare și tendința spre descoperire. Cine nu a trăit el însuși starea de spirit a cercetătorului nu va putea decît să simuleze tendința de înnoire a matematicii. După cum cel care nu este preocupat să comunice și altora faptele matematice care-l preocupă va găsi cu greu prezentarea cea mai adecvată auditoriului pe care-l are în față.

Este o iluzie să credem că, învățînd o definiție, am asimilat și noțiunea care face obiectul ei. Noțiunile matematice au oarecum soarta cuvintelor. Așa cum definiția unui cuvînt în dicționar nu poate epuiza bogăția sa de sensuri, o definiție matematică nu poate cuprinde totalitatea comportărilor contextuale ale obiectului matematic la care ea se referă. De aici, necesitatea de a face un număr cît mai mare de exerciții; ele adaugă definițiilor un număr mare de nuanțe contextuale.

Cuvintele nu pot căpăta o putere magică numai pentru că sînt tipărite. Cărțile de matematică, chiar cele mai bune, pot conține motivații insuficiente, lacune în demonstrații, lungimi inutile sau pur și simplu greșeli de tipar. Învață-te să le descoperi singur. Este cel mai bun test al asimilării materiei.

E adevărat că definițiile nu se demonstrează. Dar aceasta nu înseamnă că ele sînt arbitrare; posibilitatea de a le motiva este simptomatică pentru înțelegerea matematicii nu numai ca tehnică de lucru, ci și ca fapt de cultură.

Nu te lăsa intimidat, dar nici păcălit, de expresii ca „se vede ușor că" sau „este evident că". Sub astfel de asigurări,

care se vor liniștitoare se pot ascunde oricare dintre următoarele categorii de aserțiuni: 1) propoziții într-adevăr imediate; 2) propoziții ușoare, dar nu chiar evidente; 3) propoziții evidente pentru un matematician versat, dar cerînd o argumentare destul de laborioasă din partea unui începător; 4) teoreme grele chiar pentru un matematician format; 5) propoziții false. Este cunoscută întîmplarea cu celebrul matematician englez Hardy, care, în fața studenților, după ce a avansat un rezultat ca evident, a avut nevoie de un timp îndelungat pentru a constata că rezultatul în cauză e într-adevăr... evident.

La întrebarea „Cît fac 5 împărțit la zero?" unii elevi mai răspund, din păcate, 5. Au pregătit și o justificare: „Dacă ai cinci mere și nu le împarți la nimeni, rămîi cu toate cinci". Nu cumva de vină sînt acele manuale care evită definirea lui zero ca element nul în operația de adunare, preferînd definirea sa „conținutistică", de tipul „zero înseamnă nimic"?

O situație asemănătoare o prezintă mulțimea vidă, care acum figurează chiar în manuale de la clase mici. Nefericită definirea acestei mulțimi drept mulțimea care nu conține nici un element (definiție care provoacă replica firească a unora dintre elevi: „Dacă n-are nici un element, atunci a dispărut mulțimea!"). Introducerea acestui concept pe cale operațională, prin indicarea comportării mulțimii vide în anumite operații cu mulțimi, este mult mai conformă cu natura lucrurilor.

Învață-te să citești în zigzag. Dacă nu ai înțeles un lucru chiar după mai multe încercări, treci totuși mai departe. S-ar putea ca unele puncte de rezistență de la pagina 50 să capituleze abia după ce le-ai asediat, avansînd pînă la pagina 100. Chiar dacă ți se pare că ai înțeles totul, reia din cînd în cînd lectura textului parcurs. Probabil că-ți va apărea într-o lumină nouă.

După ce ai rămas cu impresia că ai înțeles o teoremă relativă la spații topologice, controlează-te dacă o poți particulariza la bietul spațiu euclidian.

Ești în stare să recunoști o teoremă sau o definiție atunci cînd se schimbă notația utilizată de profesor sau în manual, sau cînd formularea ca atare este modificată într-o variantă totuși echivalentă? Dacă răspunsul e negativ, înseamnă că nu cunoști teorema, ci numai veșmîntul ei, n-ai înțeles spiritul definiției, ci numai litera ei.

Nu e totuna dacă studiezi în fiecare zi cîte trei ore sau de două ori pe săptămînă cîte zece ore. Așa cum nu e totuna

dacă mănînci de trei ori pe zi sau o singură dată cît de trei ori. Creierul (ca și stomacul) pretinde o anumită periodicitate, un anume ritm. O activitate intelectuală zilnică generează un mediu intelectual corespunzător, care ne permite să ne familiarizăm cu obiectul supus studiului, să dezvoltăm nu numai înțelegerea lui rațională, dar și cuprinderea lui intuitivă.

Calculele pe care profesorul le scrie pe tablă se află probabil și în manual. Nu e foarte important să fie transcrise cu toate detaliile în caiete. Fii însă cel puțin la fel de atent la comentariile pe care profesorul le face fără a le scrie pe tablă. S-ar putea ca ele să nu se afle în nici o carte!

Într-un eseu despre Bach și muzica pură, Georges Duhamel spune că înclinația pentru matematică este aproape neomenească, pentru că este comună omului și animalului. Duhamel are aici în vedere faptul că o albină construiește cu perfecțiune alveola hexagonală, „minune a geometriei". Dar se poate pune semnul egalității între structurile matematice ale naturii (fizice, chimice sau biologice) și cele pe care mintea omenească le creează sau le regăsește în mod deliberat, pentru a diminua entropia universului în sensul dorit de ea? Matematica, produs al culturii, este una, în timp ce structura matematică a naturii este cu totul alteeva. Dacă prima dintre acestea este neomenească pentru că-și ia ca model pe cea de a doua, atunci și arta e neomenească, pentru că fără frumusețea naturală a Monei Lisa nici pînza lui Leonardo n-ar fi existat. Sau, pentru a ne referi chiar la domeniul pe care Duhamel îl are în vedere și pe care-l contrapune matematicii: este oare muzica neomenească pentru că e „concurată" de trilurile privighetorii?

Matematica e ca urcușul pe munte. Efortul este răsplătit de priveliști măreț e. Ca și pe munte, ascensiunile în matematică sînt frumoase dacă nu ești obsedat doar de locul unde vrei să ajungi și dacă ești în stare să savurezi tot ceea ce întîlnești pe parcurs.

Dacă la capătul mai multor ore de clasă, de curs sau seminar, mai multor zeci de pagini de manual, nu ai acumulat nici o nedumerire, nu ți-ai pus nici o problemă, este cazul să intri în stare de alarmă. Probabil că stilul tău de lucru e defectuos, exigența ta e redusă.

Discursul matematic are totdeauna un caracter deschis, generator de întrebări. A învăța să te nedumerești este lucrul cel mai important. Restul vine aproape ca un corolar.

Păstrează-ți în orice condiții luciditatea necesară unei priviri critice. Fii față de un text matematic ca un detectiv

care suspectează totul. Aceasta e singura stare de spirit care poate duce la o înțelegere adîncă a faptelor matematice și poate genera idei noi.

Nu accepta o afirmație numai pentru că e rostită de la catedră. E cel mai mare respect pe care-l poți arăta profesorilor tăi; marea lor satisfacție este de a vedea că au dezvoltat la elevii și studenții lor același tip de exigență pe care ei îl practică față de studenți sau elevi.

A verifica o teoremă este una. A ajunge la ea este cu totul altceva. Arta pedagogului constă în a apropia aceste două momente, prin intermediul unei demonstrații adecvate.

Nu totdeauna problema care a generat un anumit concept este și locul cel mai important în care acest concept se folosește. Noțiunea matematică de ideal a fost introdusă de către Kummer cu prilejul cercetărilor sale asupra problemei lui Fermat, dar importanța în algebra modernă a noțiunii de ideal depășește poate importanța problemei lui Fermat.

O mare parte dintre neadevărurile care au fost rostite la adresa matematicii își au originea în modul defectuos în care autorilor acestor neadevăruri li s-a predat matematica în școală.

CULEGERI DE PROBLEME

Caracterul competitiv al examenului de admitere în învățămîntul superior și faptul că la proba scrisă se propun mai cu seamă chestiuni aplicative, explică interesul pe care candidații îl manifestă pentru culegerile de probleme. Într-adevăr, manualele cuprind mai cu seamă aplicații standard; pentru a reuși într-o competiție în care pentru un loc concurează uneori vreo zece candidați este necesar un antrenament în rezolvarea unor probleme dintre cele mai variate ca grad de dificultate și conținut, probleme pe care manualele nu le oferă. Mulți elevi încep acest antrenament cu cîțiva ani înainte de a absolvi liceul. Dar efortul nu e totdeauna bine canalizat. Uneori se supraliciteză cărțile universitare, nu în sensul aprofundării materiei școlare, ci în acela al dobîndirii unor cunoștințe suplimentare, cu care comisia de examen ar putea fi epatată. Alteori se pune accentul pe forme pasive, al căror randament este redus: participare la cursuri de pregătire, meditații cu meditatori care se mulțumesc să transmită rețete gata făcute. Incomparabil mai eficace sînt lucrul personal, cazna de a obține în mod independent soluția unei probleme. Pentru aceasta e nevoie însă de cărți bune;

ele pot transforma pregătirea pentru examen într-o activitate dacă nu pasionantă, cel puțin agreabilă.

Au apărut, de-a lungul anilor, tot felul de culegeri de probleme. Din păcate, la unele dintre ele interesul comercial este precumpănitor. Dar, treptat, acestea sînt concurate de culegeri serioase, bazate în mare măsură pe elaborări proprii. Au apărut și culegeri de probleme date la examenele de admitere din ultimele decenii. Ele sînt binevenite, dar nu trebuie uitat că transformările recente prin care a trecut învățămîntul nostru determină schimbări de concepție și structură în selecția viitorilor studenți. Într-un moment în care la tradiționalele olimpiade școlare s-a adăugat activitatea cercurilor științifice din școli și facultăți, iar perioadele compacte de practică productivă i-au adus pe elevi și pe studenți în contact cu o problematică nouă, într-un moment în care stimularea creativității științifice, tehnice și artistice a tineretului a devenit o problemă națională, mai poate oare examenul de admitere să se păstreze în vechile coordonate? Mai e oare posibil să se propună candidaților probleme artificiale, vizînd o virtuozitate fără o suficientă acoperire metodologică și cognitivă?

Ultimele decenii au marcat un reviriment în elaborarea unor culegeri de probleme care vin în întîmpinarea acestei situații noi. Meritul lor constă în formularea corectă a problemelor (în unele culegeri anterioare multe formulări lăsau de dorit), o corelare mai strînsă cu faptele și metodele generale, o dezvoltare riguroasă și completă a soluțiilor. Prin nivelul înalt al unora dintre probleme, prin modernitatea lor, prin diversificarea surselor de proveniență, prin includerea unui mare număr de probleme originale, noile culegeri apropie activitatea de rezolvare de aceea de cercetare. Se estompează astfel și trecerea de la regimul de muncă din școală la cel universitar, trecere care pentru mulți tineri constituie încă un șoc. Aceste culegeri se adresează atît elevilor din clasele superioare cît și studenților din facultăți tehnice, economice, de matematică, de fizică sau de chimie. Astfel, dacă în culegerea întocmită de I. Iliescu, B. Ionescu și D. Radu (Editura Didactică și Pedagogică, 1976) se tratează în special probleme de algebră, geometrie și trigonometrie la nivelul programei școlare, în „Culegere de probleme de calcul diferențial și integral" (Editura Tehnică, 1976), vol. I de L. Aramă și T. Morozan, vol. II și III de Gheorghe Bucur, E. Câmpu și S. Găină, accentul e pus pe probleme de nivel universitar (în special în ultimele două volume), ca și în cartea publicată de C. Popa, V. Hiriș și M. Megan (Editura Facla, 1976). Un

exemplu impresionant îl constituie ciclul de culegeri de probleme de analiză matematică publicate începînd cu 1974 de către Gh. Siretchi (Centrul de multiplicare al Universității din București). Subtilitățile analizei matematice apar aici în toată varietatea lor, oferind tinerilor harnici și ageri multe prilejuri de a-și manifesta inițiativa și inteligența. Este semnificativ faptul că la alcătuirea acestor volume au contribuit și trei grupe de studenți din anii I și II, în cadrul practicii lor productive. Mulți dintre acești studenți au elaborat ulterior lucrări originale, publicate în reviste de specialitate. S-a confirmat încă o dată că de modul în care studentul pornește la drum în anul I depinde esențial lucrarea sa de diplomă.

Un alt fapt semnificativ e diversitatea tematică a culegerilor; acestea acoperă acum mai toate domeniile matematicii școlare și universitare. Astfel, G. Ciucu, V. Craiu și I. Săcuiu au publicat „Probleme de teoria probabilităților" (Editura Tehnică, 1974), una din puținele în lume — dacă nu singura — cu acest profil. O. Bâscă și H. Georgescu au publicat o culegere de probleme pentru programarea în Fortran (Editura Albatros, 1975). O altă culegere se referă la limbajul Cobol. Alte culegeri sînt profilate pe teoria mulțimilor, pe topologie, pe algebră, pe geometrie, pe ecuații diferențiale, funcții de variabilă complexă etc.

Examenele universitare arată că studenții învață mai ușor ideile generale decît folosirea lor într-o situație particulară. Însă nici o teorie nu se justifică dacă nu are la bază cel puțin un exemplu semnificativ. A descoperi exemple pentru teorii deja constituite, a inventa exemple pentru a înțelege limitele unei teorii, a identifica acele situații particulare care reclamă elaborarea unei teorii noi, iată numai cîteva activități pentru care un foarte bun antrenament este rezolvarea de exerciții și probleme. Singurul test al înțelegerii profunde a unei teorii este posibilitatea de a o folosi în situații inedite. Un mare matematician francez, René Thom, consideră posibilitatea de a genera probleme în același timp accesibile și nerutinare drept criteriul de bază în justificarea prezenței unor noțiuni și rezultate în programa de învățămînt școlar.

Iată de ce culegerile de probleme de bună calitate, ca cele la care ne-am referit mai sus, nu vor fi niciodată prea multe.

Datele recente ale științelor care studiază dezvoltarea psihică și intelectuală a copilului și a adolescentului confirmă existența, la orice individ uman, a unei tendințe naturale de explorare a mediului în care el este plasat. La rîndul său, mediul social poate stimula sau inhiba această tendință, în funcție de atitudinea pe care o adoptă față de indivizi. Numai o societate care reușește să canalizeze curiozitatea vîrstei fragede într-o direcție care treptat se transformă în sete de cunoaștere, inițiativă și gîndire personală, își menține șansa unei dezvoltări superioare a științei și tehnicii, a economiei și culturii. În această ordine de idei, creația științifică și tehnică de masă își găsește o legitimare profundă. Cluburile Minitehnicus ale pionierilor, cercurile științifice și activitățile în producție ale elevilor și studenților, mișcarea de inovații și invenții din întreprinderi atestă posibilitatea unei atitudini creatoare în orice activitate socială, la orice vîrstă și la orice nivel.

Creația și rutina se împletesc în mod diferențiat, aproape irepetabil de la un individ la altul. Este profund greșit să se creadă că numai unii tineri, foarte puțini, au șansa unor performanțe intelectuale, iar alții, cei mulți, nu vor putea, orice ar face, să depășească mediocritatea. Uneori, un student care obține în primii ani de facultate vreo două-trei note de 6 și 7 este privit, mai tîrziu, cu suspiciune, dacă în evoluția sa se observă o schimbare în bine. Dacă am avea mai multă încredere în personalitatea studentului, în capacitatea de a se autodepăși și în capacitatea noastră de a-l stimula în această direcție, dacă nu am inhiba prin nimic dorința tînărului de a se afirma, atunci randamentul său ar crește în mod simțitor.

Activitatea științifică a tinerilor a devenit o realitate fundamentală a vieții noastre școlare și universitare. Mai trebuie însă ca această cercetare să fie conștientă de locul pe care trebuie să-l ocupe în ansamblul cercetării științifice și al vieții sociale. Activitatea științifică nu poate fi considerată ca un exercițiu în sine; dimpotrivă, ea trebuie să anticipeze situația în care se va afla tînărul după absolvire, în exercitarea profesiunii sale. Din păcate, activitatea științifică studențească este încă, de multe ori, un laborator care nu reproduce condițiile unei cercetări științifice autentice. Rareori tînărul învață să caute singur bibliografia problemei de care se interesează, să folosească în acest scop revistele de referate. Uneori nu deprinde să-și delimiteze riguros

contribuția sa de rezultatele de la care a plecat și să-și redacteze lucrarea cu scrupulozitate, în așa fel încît să rezulte clar motivația problemei studiate, gradul de originalitate și gradul de dificultate ale rezultatelor obținute, semnificația și consecințele lor. Redactarea însăși lasă de multe ori de dorit.

De toate aceste lucruri ne-am amintit răsfoind unele volume din *Buletinele științifice ale elevilor și studenților* publicate anual și cuprinzînd lucrările premiate la Conferințele naționale ale cercurilor științifice. Trebuie salutată inițiativa publicării lor, ele arată progresul simțitor realizat în ultimii ani. Dar, între timp, și exigențele au crescut.

CREAȚIE ȘI COMUNICARE

Dicționarul de filozofie publicat în 1978 de Editura Politică include printre termenii noi față de cei din versiunea sa anterioară (publicată în 1973) și cuvîntul *creativitate*. Înregistrare tîrzie a unui concept care s-a impus de mult în disciplinele umaniste (de exemplu în lingvistică și psihologie), creativitatea este capacitatea specific umană de a produce (prin mecanisme care nu sînt încă elucidate) obiecte noi, deci calitativ diferite de cele produse anterior, atît în domeniul material, cît și în cel spiritual. Personalitatea noastră este dată de măsura și modul în care ne actualizăm capacitatea creativă.

Un alt termen nou introdus în versiunea din 1978 a Dicționarului de filozofie este *comunicare*. Cuvîntul e cunoscut, firește, de mult, dar a căpătat greutate filozofică și socială abia în ultima vreme; pe măsură ce s-au diversificat mijloacele și procesele de comunicare, au apărut posibilități de comunicare la distanțe din ce în ce mai mari și au crescut necesitățile și implicațiile sociale ale comunicării.

Pentru a se putea actualiza, creativitatea are nevoie de un context social adecvat, deci implicit de dezvoltarea unor acte de comunicare. Tot așa, înțelegerea structurii proceselor de comunicare a cerut, din partea unor discipline ca psihologia, lingvistica, semiotica, cibernetica, teoria informației, un efort creator care le-a transformat atît obiectul cît și metoda.

Creativitatea și comunicarea sînt deci două aspecte fundamentale ale omului contemporan, care se condiționează și se completează, dar în creativitate individualul intră mai

mult decît socialul, după cum în comunicare socialul trece înaintea individualului. O întreagă tipologie umană se dezvoltă în raport cu modul în care funcționează corelația dintre creativitate și comunicare. Lăsăm deoparte acum situațiile-limită în care amîndouă sînt în suferință sau amîndouă funcționează în mod optim, pentru a ne opri la alte două cazuri, intermediare. Am cunoscut mulți tineri dotați, în stare să rezolve cu imaginație și spirit analitic probleme grele, dar deficitari în modul de a comunica altora, în scris sau oral, rezultatele obținute. Aici își spun cuvîntul atît o insuficientă practică socială, o insuficientă „ieșire în lume", cît și un insuficient antrenament, în anii de școală, pentru exprimarea liberă. Avem aici în vedere și incapacitatea unor autori de a-și redacta rezultatele într-o formă corespunzătoare. Inaptitudinea comunicării poate face ineficientă opera de creație.

O situație complementară o prezintă tipul care comunică ușor, uneori manifestă chiar o adevărată virtuozitate în confecționarea frazelor, dar este incapabil să dea la iveală un lucru personal, rod al unei inițiative proprii. Desigur, aici trebuie distinse mai multe posibilități. Capacitatea de comunicare poate fi ea însăși, în anumite condiții, o formă de creativitate, cum este literatura. Se poate însă întîmpla ca tendința de comunicare să rămînă fără acoperire sub raport creator, să fie chiar folosită pentru a camufla absența personalității. Așa se poate ajunge la diferite forme de demagogie, practicate de cei care se agită fără să facă nimic. Din păcate, ei nu lipsesc nici din unele unități de cercetare și au totdeauna pretențiile cele mai mari.

Dar nu numai indivizii umani, ci întreaga cultură a unei societăți se definește în raport cu polaritatea creație-comunicare. Un echilibru sănătos între capacitatea creatoare a unei societăți și capacitatea ei de a intra în comunicare cu alte societăți se manifestă, între altele, prin aptitudinea de a face recunoscute și respectate în lume valorile societății tale și prin capacitatea acestei societăți de a recunoaște și prelua de la celelalte societăți valorile pe care ele le-au produs. În acest sens, trebuie să depunem în continuare eforturi pentru ca între capacitatea de creație a culturii românești și capacitatea ei de a intra în comunicare cu celelalte culturi să nu existe nici un decalaj în defavoarea capacității de comunicare.

În domeniul matematicii, există la noi o frumoasă tradiție a concursurilor școlare. Concursurile *Gazetei matematice* au stimulat preocupările științifice ale tineretului timp de peste patruzeci de ani, lansînd numeroase talente, din care s-au recrutat ulterior mulți dintre matematicienii și inginerii noștri de seamă. Olimpiadele de matematică organizate în ultimele decenii continuă, mai ales prin etapa lor finală, pe țară, tocmai aceste concursuri care au animat viața noastră științifică în prima jumătate a secolului nostru. Dar, evident, cei care au conceput aceste întreceri în domeniul științei sau literaturii, prin analogie cu întrecerile sportivilor, nu au intenționat să adauge, pur și simplu, la șirul lung de controale la care oricum trebuie să se supună orice elev pentru a putea fi promovat, încă un examen. Intenția nu a fost de a mări cu încă o unitate numărul și așa destul de mare de teze, extemporale și examene orale ale elevilor.

Întorcîndu-ne la semnificația originară a acestui frumos cuvînt — OLIMPIADA — și la adjectivul *olimpic* pe care l-a generat, intrăm imediat într-o atmosferă de sărbătoare și fast, de maiestuos și impunător pe care în mod tradițional olimpiadele sportive au creat-o. Aceste întreceri nu au fost gîndite ca o activitate standard, de testare rutinară a unor capacități minimale ale concurenților.

Nu controlul unui bagaj minimal de cunoștințe și deprinderi, ci o întrecere a talentelor și a pasiunilor, pentru a se crea în acest fel o emulație generală, de natură să ambiționeze pe cît mai mulți elevi să lucreze la randamentul lor maxim; aceasta își propun olimpiadele.

Să ne referim la problemele propuse, de la începutul secolului pînă azi, la diferite concursuri și olimpiade școlare; multe dintre aceste probleme au fost strînse în două volume, unul aparținînd lui T. Roman, O. Sacter și Gh. D. Simionescu (perioada 1900—1967), iar al doilea lui L. Panaitopol și C. Ottescu (1968—1974). Sînt printre ele multe frumoase, elegante, formulate lapidar, pline de ingeniozitate, vizînd calitățile intelectuale ale tinerilor: spirit de observație, îndemînare combinatorie, capacitate de deducție logică, putere de abstracție și analogie. Dar nu mai puțin adevărat este și faptul că un mare număr de probleme sînt lipsite de o motivație convingătoare, fapt care le conferă un simplu caracter de joc, în genul problemelor de șah. Să se fi interpretat în acest fel analogia cu olimpiadele dedicate jocurilor sportive? În cei aproape o sută de ani care ne despart de

primele concursuri școlare, matematica a parcurs o evoluție impresionantă, dar ea se reflectă foarte palid în problemele date la olimpiade și alte concursuri. Cu greu ar recunoaște cineva în aceste probleme mutațiile aduse de viziunea structurală și de cea algoritmică, rolul social crescînd al matematicii, aplicabilitatea ei universală.

Mai e însă și un alt aspect. Problemele de olimpiadă nu s-au diferențiat suficient, ca factură, de problemele curente. Nu avem în vedere aici diferența în ceea ce privește gradul de dificultate (această diferență a fost, în general, observată), cît diferența în gradul de atractivitate. Unele dintre problemele propuse la olimpiade sînt aride și nu-și dezvăluie nici o semnificație cognitivă. Le propunem elevilor să rezolve nenumărate tipuri de ecuații, dar destul de rar sînt ei invitați să stabilească modul în care aceste ecuații iau naștere dintr-o problemă reală. Și totuși, elevii de azi sînt cei care vor trebui să construiască modele matematice pentru problemele energetice, de materii prime, ecologice, de hrană sau informaționale cu care omenirea e din ce în ce mai mult confruntată.

POLITEHNIZARE

Prin politehnizare înțelegem acea pregătire care oferă viitorului absolvent o orientare profesională largă, caracterizată prin varietate și mobilitate. Trecerea la acest tip de pregătire este cerută de ritmul alert de schimbare a profesiunilor pe care le generează actuala revoluție tehnico-științifică. Fizionomia exactă a noilor profesiuni este de multe ori imprevizibilă, iar specialiștii pe care ele îi reclamă trebuie formați aproape „din mers". Capacitatea de a face față acestui proces presupune o formare solid sprijinită pe disciplinele fundamentale, singurele capabile să identifice numitorul comun al unor specialiști în continuă mișcare și transformare. Legătura dintre funcția cognitivă a științei și funcția ei utilitară devine tot mai strînsă, fapt care va duce probabil la ștergerea deosebirilor dintre învățămîntul universitar și cel politehnic și înglobarea lor într-un singur sistem. În unele ramuri acest proces s-a și realizat; a se vedea exemplul Chimiei.

Însă pentru a face față unor situații noi, nu sînt suficiente înmagazinarea de cunoștințe și practicarea unor procedee gata făcute; este nevoie, în plus, de inițiativă și imaginație, de competență în abordarea unor situații inedite, pe baza

unor idei noi sau asociate altfel decît pînă atunci. Aceste aptitudini nu se pot forma decît printr-un antrenament îndelungat în cercetare și în situații autentice, deci în producție, în cadrul procesului de integrare. Înțelegem astfel că accentul pus pe disciplinele fundamentale nu numai că nu vine în contradicție cu legarea învățămîntului de cercetare și producție, dar o și face posibilă pe aceasta din urmă.

Văzută astfel, politehnizarea este un deziderat care trebuie înfăptuit pe toate treptele învățămîntului nostru. Nu putem vorbi de o politehnizare optimă în cadrul unei facultăți dacă această pregătire multilaterală nu a fost realizată, progresiv, încă din școala generală și din liceu. Strategia politehnizării trebuie să se sprijine esențial pe latura formativă — nu pe cea informativă a științei. Cu prilejul unor vizite în școli, am întîlnit multe situații în care, la rezolvarea unor probleme, elevul nu este lăsat să ajungă el singur la o soluție; nu este dezvoltat acel moment de imaginație, de creație, de gîndire, momentul de căutare în care, printr-un mecanism foarte delicat, elevul ar putea fi stimulat în manifestarea inițiativei sale personale. De exemplu, ideea considerării unei paralele care, duse printr-un anume punct la o anume dreaptă, oferă cheia rezolvării unei probleme de geometrie, în loc să fie obținută de la elevi, prin întrebări socratice, este „adusă de-acasă".

Aș adăuga acestui exemplu încă unul, referindu-mă la absolvenții învățămîntului de informatică. Ei sînt de multe ori nevoiți să învețe diferite limbaje și tehnici, pe care nu le-au cunoscut ca studenți. Se adaptează mai ușor acestor situații acei absolvenți care nu s-au mulțumit în facultate să rețină anumite cunoștințe, ci au reușit în plus să asimileze un anumit tip de gîndire, pe care l-am putea numi gîndirea algoritmică.

Cîteva cuvinte despre rolul matematicii în politehnizare. Înainte de a fi un instrument de lucru, matematica reprezintă un mod de gîndire care ne poate ajuta în orice activitate. Intră aici: o anumită disciplină a procedurii în etape, fiecare etapă sprijinindu-se pe etapele anterioare; distincția dintre diferite nivele de abstracție; capacitatea de a descoperi analogii între situații eterogene; o anumită abilitate de raționament combinator și strategic (ca la șah); dar, mai presus de toate, o anumită putere imaginativă, care ne conduce la elaborarea unor modele ale fenomenelor din natură, societate, viața practică. Prin toate aceste virtuți, matematica intervine esențial în politehnizare; pentru că, într-a-

devăr, politehnizarea înseamnă o anumită deschidere a gîndirii, un continuu decalaj între ceea ce facem și ceea ce am putea face, totdeauna în favoarea celui de al doilea termen.

SĂ FACEM TOTUL MAI BINE

Lucrez de 36 de ani în învățămînt. Dacă adaug și anii de studenție, pot spune că știu viața noastră universitară, viața școlii românești în genere, de 40 de ani; o cunosc nu din afară, ca spectator, ci dinăuntru, ca unul direct implicat în cele mai multe evenimente pe care le-a parcurs în acești ani învățămîntul nostru. Nu a fost o evoluție liniară. Mai mult poate decît în alte domenii, în problema educației bunele intenții dau rezultate numai dacă sînt aliate cu competența și, desigur, cu o politică de dreptate socială. Competența se dobîndește prin experiență și învățare, prin învățarea din experiență. Dar experiența, în domeniul educației, dacă nu exclude experimentul, îl limitează considerabil, la grupuri umane relativ mici și pe durate mici. În medicină se fac experiențe pe șobolani, în educație însă experiențele cu animale sînt prea puțin relevante pentru pedagogia umană.

Ceea ce trebuia făcut după eliberare era evident pentru toți cei care doreau binele acestei țări: lichidarea analfabetismului, introducerea învățămîntului elementar obligatoriu, democratizarea învățămîntului, prin mărirea numărului de școli și de instituții de învățămînt superior și prin crearea condițiilor în care cît mai mulți fii de muncitori și de țărani să capete acces la formele superioare de învățămînt; înființarea învățămîntului seral și a celui fără frecvență care să dea posibilitate celor aflați în cîmpul muncii de a-și completa instrucția și de a dobîndi o calificare superioară.

Dar, oricît de necesară ar fi fost, creșterea cantitativă nu putea fi suficientă. Învățămîntul nostru suferea de multă vreme de o boală gravă, pe care încă Eminescu o deplîngea în rapoartele sale de revizor școlar: înstrăinarea școlii de viață, de nevoile societății. Dimensiunile acestei înstrăinări deveniseră tot mai mari în secolul nostru. Comanda socială devenea tot mai presantă, deceniul al șaptelea al secolului nostru făcea tot mai vizibilă în lume explozia demografică, iar revoluția științifică și tehnică era în plină desfășurare. Grave probleme globale ale omenirii privind hrana, materiile prime, energia, mediul ambiant, înarmarea și atîtea altele se precizau și se amplificau. Acum știm că aceste probleme amenință însăși existența civilizației umane. A fost elaborată

o nouă concepție devenită acum foarte populară, constînd în politehnizarea învățămîntului și în integrarea sa cu cercetarea, proiectarea și producția. Complexitatea acestei noi situații, în raport cu care puține din experiențele noastre anterioare puteau fi valorificate, ne-a implicat într-o activitate intensă de căutare a modalităților concrete cele mai adecvate prin care, în fiecare sector al învățămîntului, apropierea de nevoile societății poate fi mai bine realizată. Asigurarea unei mobilități cît mai mari a specialiștilor pe care-i pregătim, îmbinarea asimilării de cunoștințe cu gîndirea formativă și originală, joncțiunea dintre spiritul practic și capacitatea de abordare a problemelor deschise ale cunoașterii umane, toate acestea nu pot fi realizate pe baza unor rețete șablon, ci reclamă soluții diferențiate după natura fiecărui domeniu de activitate și a împrejurărilor în care această activitate se desfășoară.

Relațiile dintre învățămîntul universitar și cel inginerese se intensifică, diferențele dintre aceste două forme de învățămînt se atenuează. Spiritul de cercetare este educat începînd cu primele clase. Aceasta nu este o trivializare a cercetării, ci un pas nou spre educarea gîndirii originale, de dezvoltare a inițiativei personale. Există încă discontinuități, pe care chiar procesul de creștere le-a generat, cum ar fi trecerea în învățămîntul superior sau intrarea în producție. Ele se vor atenua pe măsură ce vom învăța mai bine cum să-i formăm pe tineri în funcție de condițiile lor ulterioare de activitate. Manualele școlare și universitare trec și ele prin transformări importante, cu multe reușite, dar și cu inevitabile eșecuri. Trebuie să învățăm să facem totul mai bine.

POTENȚIALUL INTERDISCIPLINAR AL MATEMATICII

Printre diferitele discipline care definesc efortul de cunoaștere științifică a realității înconjurătoare, matematica ocupă fără îndoială un loc aparte. Cu greu se mai poate accepta astăzi definirea matematicii prin obiectul ei, așa cum se proceda în secolul trecut. Nici reducerea ei la o metodă de gîndire nu este posibilă, deși matematica este, într-o măsură însemnată, un ansamblu de metode de explorare a fenomenelor celor mai variate. Este matematica o disciplină de punct de vedere? Răspunsul ar putea fi afirmativ în măsura în care ar fi tautologic, deci numai dacă simplul fapt de a folosi un model matematic ar fi identificat cu adoptarea unui punct de vedere. Dar cum s-ar împăca o atare conven-

ție cu indiferența, cu caracterul neutru al faptelor matematice în raport cu diferitele interpretări care li se pot atribui? Punctul de vedere ia naștere abia în momentul în care modelul matematic este comentat, motivat sau criticat în raport cu adecvarea și relevanța sa față de o anumită realitate naturală sau socială.

Ezitarea pe care o avem în tentativa de a defini matematica pare să contrasteze cu ușurința cu care recunoaștem un text matematic. Faptul se explică prin particularitățile deosebit de pregnante ale limbajului matematic. Este interesant faptul că pe măsură ce matematica și-a diversificat obiectul și metoda, „jargonul" ei s-a tehnicizat din ce în ce mai mult, atît ca terminologie cît și din punctul de vedere al utilizării unor elemente artificiale, deci care depășesc mijloacele limbilor naturale.

În ce constă diversificarea obiectului matematicii? De la studiul relațiilor cantitative și al formelor spațiale, matematica a evoluat spre studiul diferitelor tipuri de structuri și sisteme, al aspectelor dinamice, de proces, al problemelor de strategie și interacțiune. În mod corespunzător s-au diversificat și metodele matematice. De la cele numerice, aritmetice și geometrice s-a trecut la cele algebrice și analitice, apoi la cele combinatorii, probabiliste, logice, topologice și decizionale, pentru ca acum să fie toate reconsiderate în lumina metodelor computaționale.

De unde și prin ce procedee își creează matematica o problematică atît de bogată și de variată? Ce îi asigură împrospătarea necontenită a ideilor și metodelor? Răspunsul nu se lasă ușor întrevăzut. Dacă în cazul unor discipline ca fizica, chimia, biologia, istoria, economia sau sociologia motivările se referă nemijlocit la anumite clase de fenomene ale naturii sau societății, a căror cercetare prezintă o necesitate evidentă, legitimitatea matematicii, în forma atît de abstractă și de tehnicizată pe care a dobîndit-o astăzi, se lasă mai greu descifrată. Așa se și explică numeroasele fenomene de contestare a matematicii, ca mișcare intelectuală de amploare în societatea contemporană, în timp ce nici unui specialist în vreo disciplină a naturii sau a societății nu i-a trecut prin minte să conteste utilitatea rezultatelor fizicii, ale chimiei sau biologiei. În fața unui profan, matematica își legitimează mai greu problematica și rezultatele, chiar dacă acest profan este inginer, economist sau biolog. Legăturile matematicii cu realitatea sînt mai indirecte, mai greu sesizabile decît în cazul fizicii, chimiei sau biologiei. În același timp, matematica posedă, într-o măsură mai mare

poate decît orice altă disciplină, capacitatea de a surprindee de a contrazice prin rezultatele ei intuițiile comune. Est, greu de găsit o știință care să fie atît de bogată în rezultate și entități paradoxale cum este matematica.

Dincolo de toate ezitările pe care le avem în formularea unei definiții atotcuprinzătoare a matematicii moderne, un fapt este incontestabil, chiar dacă el scandalizează pe unii oameni de cultură (inclusiv unii matematicieni), în special din domeniile umaniste și sociale: *matematica se hrănește din întreaga cunoaștere umană și o afectează pe aceasta în întregime*, propunînd, ca să spunem așa, un *numitor comun* al tuturor compartimentelor ei. *Matematica este deci o punte de legătură între toate disciplinele.* Îndreptîndu-și atenția spre aspectele care manifestă o relativă independență față de natura substanței studiate, reținînd numai forma acesteia, indiferent de faptul dacă substanța și forma pe care le avem în vedere (ne referim aici la clasicele dihotomii propuse în urmă cu cîteva decenii de către lingvistul danez Louis Hjelmslev) aparțin unui anume conținut sau unei anumite expresii, matematica devine o știință a transferurilor și analogiilor de idei, construcții, rezultate, metode, teorii sau... analogii (pentru a folosi o butadă a matematicianului polonez Stephan Banach). Potențialul interdisciplinar al matematicii constă deci nu numai în faptul că ea se află peste tot, că devine inevitabilă în orice disciplină care a ajuns la o maturitate suficientă pentru a-i permite să-și separe aspectele structurale, formale de cele substanțialiste, ci și pentru că legăturile dintre discipline nematematice sînt de multe ori realizate prin intermediul matematicii. Matematica este un catalizator al unui număr imens de procese de comunicare între discipline naturale sau/și sociale. Discipline de punct de vedere ca teoria sistemelor și semiotica, dar și discipline mai speciale, ca lingvistica, își dezvoltă virtuțile aplicative în special prin intermediul matematicii. În acest fel, matematica obligă celelalte discipline la o mai profundă cunoaștere reciprocă, la o mai profundă legătură și, eventual, la înscrierea lor într-o viziune mai cuprinzătoare, care este însăși viziunea interdisciplinară promovată de evoluția recentă a cunoașterii umane. La acest proces participă atît științele cît și artele, atît domeniile inginerești (fie ele energetice sau informaționale), cît și activitățile practice din economie, industrie și din celelalte sfere ale vieții sociale.

Unele precizări sînt de făcut aici. Mai întîi, trebuie să observăm că, în evoluția ei multimilenară, matematica nu se află acum pentru prima oară în situația de a influența

toate celelalte domenii, stimulînd colaborarea lor. Această situație a fost de fapt starea firească a matematicii pînă în urmă cu vreo cinci sute de ani. Antichitatea și Renașterea au stat sub semnul universalității structurii matematice a întregii culturi umane. Această viziune se prelungește, prin Pascal și Leibniz, de exemplu, pînă în perioada clasicismului, dar tot prin Blaise Pascal își afirmă apusul, prin acea dihotomie care avea să devină celebră: „esprit géométrique-esprit de finesse" (spiritul geometric-spiritul de finețe). Să observăm însă că, în timp ce universalitatea gîndirii matematice era, în Antichitate și în Renaștere, efectul unei insuficiente separări a disciplinelor, deci consecința unui sincretism general al științelor, artelor și meșteșugurilor, astăzi această universalitate este rezultatul unui proces opus. Cunoașterea umană a ajuns la un grad atît de înalt de specializare, de diferențiere a domeniilor și subdomeniilor, încît comunicarea între ele, implicarea lor în noi viziuni integratoare devin vitale. Devin ele și posibile? În cazul afirmativ, care sînt motivele pentru care acest proces de colaborare și sinteză interdisciplinară nu s-a petrecut, de exemplu, în urmă cu o sută de ani, ci abia în a doua jumătate a secolului nostru? Acest fapt este legat atît de dezvoltarea matematicii cît și de dezvoltarea celorlalte discipline. Matematica secolului trecut era încă predominant numerică iar celelalte discipline, cu excepția mecanicii, astronomiei și fizicii, care erau de multă vreme beneficiare ale matematicii numerice, în special ale calculului diferențial și integral și ale teoriei ecuațiilor diferențiale, nu erau încă în măsură să folosească metodele și rezultatele analizei matematice. Biologia, de exemplu, abia la sfîrșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului nostru a început să beneficieze de metodele teoriei ecuațiilor diferențiale, prin cercetările lui Vito Volterra privind lupta pentru existență, dusă de diferite specii de animale. Disciplinele vieții și ale societății beneficiau de mult de rezultatele matematicii numerice și ale geometriei, dar la nivelul la care acestea fuseseră dezvoltate cu multe secole în urmă. Să amintim, de exemplu, faptul că muzica a cunoscut una dintre primele analize numerice încă în antichitate, prin Pitagora. Numărul de aur $(1 + \sqrt{5})/2$ care apare în problema împărțirii unui segment în două segmente inegale, astfel încît raportul dintre segmentul mare și cel mic este egal cu raportul dintre segmentul total și cel mare, a fost cunoscut și el încă din antichitate, fiind identificat în numeroase opere de arhitectură și sculptură.

Ulterior, numărul de aur a fost corelat cu șirurile lui Fibonacci (definite prin proprietatea fiecărui termen de a fi

suma celor doi termeni imediat precedenți), stabilindu-faptul că șirul rapoartelor de termeni consecutivi dintr-un șir al lui Fibonacci converge către numărul de aur. S-a constatat că o mare parte din fenomenele de creștere din lumea organică (de exemplu în botanică și în anatomia umană) se desfășoară după șiruri ale lui Fibonacci, iar dacă utilizarea instinctivă a proporției de aur a dominat o mare parte din arta Antichității, a Renașterii și chiar a zilelor noastre, numeroase sînt și cazurile utilizării sale deliberate (experiențe psihologice au arătat că elevii preferă, între mai multe segmente divizate prin cîte un punct, pe cele divizate după proporția de aur). În secolul al XIX-lea, a atras cu deosebire atenția legea lui Weber și Fechner, conform căreia omul percepe lumea înconjurătoare după o lege logaritmică, în sensul că senzația este logaritmul excitației. Cu alte cuvinte, la un șir de excitații măsurabile, aflate în progresie geometrică, senzațiile noastre de răspuns, presupuse și ele măsurabile, variază în progresie aritmetică. În acest fel, matematica elementară a devenit relevantă nu numai pentru biologie, dar și pentru psihologie. Rezultate de acest fel s-au acumulat destul de multe și de semnificative, dar ele păreau să se constituie în manifestări izolate, care nu permiteau încă să se vorbească de relevanța matematicii în raport cu disciplinele omului. Pentru ca impactul matematicii asupra acestor discipline să devină atît de esențial încît să se poată vorbi de o biologie matematică și de o psihologie matematică, a trebuit să se mai scurgă cîteva decenii, timp în care, pe de o parte, matematica și-a dezvoltat instrumente noi, apte pentru studiul calității și al fineții, al impreciziei și întîmplătorului, iar biologia și psihologia, pe de altă parte, au reușit să-și precizeze unele unități și structuri fundamentale, să-și dezvăluie unele aspecte combinatorii și topologice în care importantă este în primul rînd relația în care intră anumite elemente, nu natura acestora din urmă. Dar, evident, între cele două serii de procese, cele din matematică, pe de o parte, cele din biologie și psihologie, pe de altă parte, a apărut uneori un decalaj destul de mare. Astfel, teoria lanțurilor Markov, inițiată în matematică la începutul secolului nostru, a trebuit să aștepte cincizeci de ani pentru a deveni cadrul teoretic al studiului proceselor probabiliste de învățare, în timp ce dezvoltarea celulară a organismelor filamentoase a devenit un obiect de studiu al teoriei matematice a automatelor abia în deceniul al șaptelea al secolului nostru, deoarece această teorie a apărut tîrziu, odată cu dezvoltarea informaticii.

Ceea ce am spus mai sus despre biologie și psihologie este adevărat și pentru chimie, pentru lingvistică, pentru economie și pentru celelalte științe sociale. Aristocratismul matematicii constă în faptul că ea devine utilă altor discipline în măsura în care acestea din urmă sînt suficient de evoluate în trecerea lor de la studiul aspectelor substanțialiste la cel al aspectelor relaționale, structurale, sistemice. O disciplină ca istoria a trebuit, de aceea, să aștepte multe secole pentru a putea beneficia de sprijinul matematicii. Dar nu e mai puțin adevărat că nici disciplinele nematematice nu găsesc totdeauna o matematică gata făcută, așa cum a găsit teoria relativității un sprijin în geometriile neeuclidiene dezvoltate anterior ei sau cum a beneficiat studiul proceselor de învățare de studiul proceselor Markov și de cel al lanțurilor cu legături complete, acestea din urmă fiind introduse în 1935, deci cu vreo douăzeci de ani mai devreme. Exemple concludente sînt, din acest punct de vedere, lingvistica, biologia celulară și biologia moleculară; ele au stimulat matematica să dezvolte un nou compartiment al ei, teoria limbajelor formale, cu ramificații recente de o mare complexitate și rază de acțiune, ca teoria sistemelor Lindenmayer (esențială în domeniul biologiei celulare) și teoria gramaticilor picturale (care stă la baza punctului de vedere sintactic în problemele de recunoașterea formelor, cu consecințe importante în biologie, chimie, arhitectură).

Este deci clar că universalitatea actuală a gîndirii matematice este de cu totul altă natură decît aceea din Antichitate sau din perioada Renașterii. În timp ce atunci matematica era nedezlipită de celelalte discipline, datorită unei insuficiente diferențieri a domeniilor de cercetare, a unei insuficiente autonomizări a acestora, acum impactul matematicii se explică tocmai ca o reacție la o diferențiere prea accentuată a disciplinelor de studiu. Dar ceea ce este comun ambelor etape — și acest fapt ni se pare fundamental — este *nevoia internă pe care studiul oricărei clase de fenomene o manifestă de a se prevala de gîndirea matematică.*

Această universalitate a gîndirii matematice a fost interpretată de unii autori ca o pretenție a matematicienilor de a institui o hegemonie a matematicii față de celelalte domenii ale cunoașterii. Poate că unii matematicieni sînt realmente stăpîniți de această stare de spirit; ea ar fi simetrică față de starea de spirit diametral opusă, a celor care se simt complet intimidați de limbajul matematic și care, pentru acest motiv, îl resping („omul, cînd nu înțelege, este contra", observa Gr. C. Moisil) sau, pentru exact același motiv, îl absoluti-

zează, văzînd în el un instrument miraculos. În fapt însă, universalitatea matematicii este complet echilibrată de aservirea ei față de celelalte discipline. Este greu de răspuns dacă matematica restituie surorilor ei mai mult decît acestea i-au împrumutat. Dar nici nu este important acest lucru; ceea ce este important este faptul că matematica pune la dispoziție celorlalte discipline un produs prelucrat, esențial diferit de cel pe care ea l-a împrumutat de la acestea. Întregi domenii ale matematicii s-au născut sub presiunea altor discipline. Exemplul calculului diferențial și integral, ale cărui concepte fundamentale provin din necesitatea de a se rezolva unele probleme de mecanică, este bine cunoscut. Teoria matematică a stabilității își are și ea originea în mecanică, după cum teoria matematică a distribuțiilor își are originea în unele „funcții imposibile" cu care lucrau fizicienii. Un exemplu mai recent este teoria matematică a catastrofelor, pe care René Thom a edificat-o în legătură cu modelarea fenomenelor discontinue din biologie și din lingvistică, dar care ulterior a afectat ansamblul științelor sociale, de la economie la studiul războaielor. Teoria matematică a jocurilor de strategie a fost inițiată de John von Neumann și Oskar Morgenstern în cursul celui de-al doilea război mondial, sub impulsul problemelor de tactică și strategie puse de conflagrația cu Germania hitleristă. Dar nu numai motivația inițierii unei preocupări trebuie luată în considerare, ci întregul metabolism pe care o disciplină matematică îl stabilește, de-a lungul dezvoltării ei, atît cu celelalte discipline matematice cît și cu realitatea din afara matematicii. Teoria matematică a probabilităților s-a născut din studiul jocurilor de noroc, dar ea nu ar fi căpătat o însemnătate atît de mare dacă nu ar fi fost alimentată necontenit cu probleme, idei și sugestii venite din mecanică, fizică, biologie, economie, lingvistică (mai e oare nevoie să amintim că teoria lanțurilor Markov s-a născut din studiul alternării vocalelor și consoanelor în *Evgheni Oneghin* a lui Pușkin?) și din celelalte discipline social-umaniste, deci practic din totalitatea disciplinelor, pentru că nu există domeniu din care să lipsească factorul întîmplare.

Această aservire a matematicii față de celelalte domenii are mai multe aspecte. Un aspect se referă, așa cum am văzut, la presiunea pe care o exercită asupra matematicii problematica altor discipline. Din acest punct de vedere, matematica devine de multe ori o „așteptare frustrată", deoarece ea are modul ei propriu de a formula problemele și, din acest motiv, foarte rar preia *tale quale* o problemă,

dînd astfel impresia că se ocupă de o altă problemă decît aceea care i s-a propus. Modalitatea matematică de a formula întrebările este rezultatul unor transformări aplicate întrebărilor inițiale, transformări care le fac uneori pe acestea din urmă de nerecunoscut. Pentru profan, aceste transformări capătă un caracter ezoteric, fiind uneori privite ca un mod de a eluda problema reală. De aici și butada lansată de unii ingineri, după care matematicienii sînt acei oameni care-ți rezolvă orice problemă... cu excepția celor de care ai nevoie. Într-adevăr, un inginer are uneori impresia că trebuie să rezolve o anumită ecuație diferențială, dar se poate întîmpla ca aceasta să nu fie posibil sau/și să nu fie necesar. Modul de a privi pe care-l promovează teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale îi furnizează informații care pot părea irelevante sau pe care nu știe încă în ce fel să le folosească. De asemenea, se poate întîmpla ca, pe baza unei intuiții înșelătoare, să căutăm o soluție cu proprietăți care nu pot fi satisfăcute; preocuparea matematicianului pentru obținerea unei teoreme corespunzătoare de existență poate părea sterilă. Vom relata aici o întîmplare de acest fel, legată de cercetarea matematică în domeniul indicatorilor sociali. Se știe că numărul parametrilor care intervin în studiul calității vieții este deosebit de mare, generînd o cantitate mare de indicatori sociali, globali sau individuali, a căror stăpînire și prelucrare comportă multe dificultăți. S-a pus, de aceea, problema găsirii unei agregări convenabile, în sensul grupării lor convenabile, în așa fel încît fiecare grupă de indicatori să poată fi înlocuită printr-un singur indicator (eventual chiar un indicator selecționat din grupa respectivă), care să sintetizeze, să rețină semnificațiile tuturor indicatorilor din grupă. În mod natural, s-au formulat anumite exigențe față de aplicația care asociază fiecărei grupe un indicator unic. Astfel, i s-a cerut să fie o aplicație prin intermediul căreia la modificări mici ale indicatorilor individuali corespunde o modificare mică a indicatorului sintetic. I s-a mai cerut acestei aplicații să fie, în raport cu fiecare variabilă (deci în raport cu fiecare indicator individual), o aplicație monotonă pe porțiuni.

În sfîrșit, i s-a cerut să fie necompensatoare, în sensul că nu totdeauna doi indicatori se pot compensa reciproc (de exemplu, libertatea nu poate fi acordată în schimbul hranei și nici hrana în schimbul libertății). S-a demonstrat însă că o astfel de agregare a indicatorilor pur și simplu nu există, deci nu are sens să o căutăm. Un astfel de rezultat nu putea

fi intuit, iar cercetarea sociologică efectuată cu metode tradiționale nu avea cum să ajungă la el.

Un alt aspect al dependenței matematicii de celelalte discipline se referă chiar la dezvoltarea internă a matematicii. O reprezentare simplificată a acestei dezvoltări cuprinde trei faze, ca în activitatea unui automat ale cărui intrări provin din exterior, fiind apoi supuse acțiunii interne a automatului, acțiune care se convertește în anumite ieșiri spre exterior. Realitatea este însă mai complexă. Viața unei teorii matematice nu interferează cu realitatea exterioară ei numai în etapa sa inițială și în etapa ei finală, ci se află într-o continuă confruntare cu această realitate. Desigur, aceasta se întîmplă nu numai cu teoriile matematice, ci cu orice teorie științifică. Apare, însă, aici o particularitate a teoriilor matematice, pe care trebuie s-o discutăm pentru semnificația ei general-filozofică și pentru însemnătatea ei practică. Se știe că teoriile matematice moderne au o structură axiomatic-deductivă; tratatul lui Nicolas Bourbaki, care expune într-un astfel de cadru o mare parte din teoriile matematice, este semnificativ în acest sens. Într-o teorie axiomatic-deductivă există o tentație irezistibilă de a te lăsa antrenat de combinatorica deductivă a rezultatelor obținute, în vederea obținerii unor noi și noi rezultate. De foarte multe ori această dezvoltare a mecanismului deductiv nu este lăsată să se efectueze la întîmplare; o anumită intuiție a rotunjimii unei teorii, un sentiment estetic al armoniei diferitelor proprietăți obținute, al coeziunii întregului edificiu logic care se conturează sînt tot atîtea supape prin care matematicianul controlează consistența construcției la care se angajează. De multe ori, aceste criterii logico-estetice nu au dat greș, iar teoriile care li s-au conformat și-au demonstrat, mai devreme sau mai tîrziu, vitalitatea. Dar nu e mai puțin adevărat că în alte numeroase cazuri a fost nevoie să se suplimenteze criteriul logico-estetic cu cel al confruntării cu situații particulare semnificative, din natură sau din societate, această confruntare fiind profitabilă atît pentru studiul situațiilor particulare considerate, cît și pentru dezvoltarea într-o direcție interesantă a teoriei matematice. După Paul Halmos, interesul unei teorii nu poate fi dovedit în absența unor exemple semnificative. Teoria matematică a deciziilor a fost stimulată de posibilitatea abordării unor dileme reale (pentru a folosi un exemplu românesc, ne vom referi la studiul păcii separate cu Germania în timpul primului război mondial, studiu în care teoria deciziilor s-a dovedit a fi un instrument exemplar), care au orientat însăși dezvoltarea

acestei teorii. Teoria echilibrului în grafuri s-a putut aplica în studiul evoluției unor situații conflictuale reale sau de ficțiune (în special în domeniul folclorului, al structurilor narative culte, al teatrului), dar în același timp exemplele studiate au învederat necesitatea extinderii acestei teorii la cazul în care relațiile umane sau sociale sînt susceptibile de mai mult decît două valori (pozitiv și negativ). Exemplele pot continua, dar ne vom opri numai asupra unuia dintre ele, relativ la informatica matematică, exemplu cu atît mai semnificativ cu cît informatica a revoluționat posibilitățile de prelucrare a datelor și de simulare automată a proceselor intelectuale de natură algoritmică, oferind astfel științelor omului și societății perspective pe care ele nici măcar nu le-au bănuit. Se știe că informatica s-a dezvoltat pe baza unei considerabile activități experimentale, dar în același timp cu sprijinul unor instrumente ale logicii matematice, aritmeticii și algebrei. S-au conturat astfel două tendințe, una constructivă, cu accentul pe motivațiile legate direct de problematica informaticii, alta axiomatică și structurală, corelată în primul rînd cu aspectele algebrice generale ale fundamentelor informaticii. Prima este legată de numele unui Michael Arbib, a doua de acela al lui Samuel Eilenberg. Prima pune accentul pe probleme și soluții, a doua e algebrică. Prima e dominată de construcțiile algoritmice, a doua de cele generalizatoare, axiomatic-deductive. Prima este preocupată în primul rînd de motivațiile computaționale, a doua de cele algebrice. A doua reflectă în primul rînd nevoia matematicii de a integra, pe cît posibil, în teoriile structurale deja existente sau cel puțin de a raporta la acestea noile achiziții ale matematicii aplicate, prima reflectă demersul inductiv și constructiv al cercetătorului preocupat în primul rînd de relevanța modelului matematic într-o problemă care nu este numai a matematicii. Între cele două puncte de vedere s-au consumat unele polemici, dar acum știm că ele nu se exclud, ci se completează, reprezentînd două momente distincte, amîndouă necesare, ale demersului științific.

Un alt exemplu semnificativ din punctul de vedere al necesității unui contact permanent cu lumea vie a fenomenelor reale îl oferă teoria probabilităților, la care ne-am mai referit în acest studiu. În urmă cu cîteva decenii, această teorie a fost axiomatizată cu ajutorul teoriei matematice a măsurii (A. N. Kolmogorov). Dar intuițiile și problematica acestei teorii au continuat să se alimenteze din contactul direct cu experiența. În particular, disciplinele umaniste

au constituit un stimulent deosebit pentru dezvoltarea acestei teorii.

S-a afirmat de multe ori, mai cu seamă de către cei care lucrează în domeniul științelor sociale, că aceste științe au nevoie de o matematică nouă, care abia trebuie elaborată, deoarece matematica existentă provine în primul rînd din problematica științelor naturii. Acest deziderat este de obicei formulat ca urmare a insuficientei relevanțe a unora din modelele matematice utilizate în momentul de față în economie și în sociologie. Desigur, așa cum am arătat mai sus, matematica își îmbogățește metodele ca urmare a contactului ei mai strîns cu disciplinele sociale; dar, în același timp, trebuie să observăm că posibilitățile actuale ale matematicii nu au fost nici pe departe exploatate, la dimensiunea lor reală, în investigarea fenomenului social. Un imens potențial interdisciplinar al matematicii rămîne încă neutilizat. Am putea spune că chiar la nivelul matematicii elementare, chiar la nivelul gîndirii matematice din care tehnicile matematice propriu-zise sînt absente, se pot obține numeroase rezultate de o deosebită relevanță, în aproape orice domeniu de activitate. Poate că aici se află cele mai bogate resurse interdisciplinare ale matematicii, dar este greu să le evaluăm, tocmai pentru că sînt „nevăzute". Ni se întîmplă de multe ori, nouă, matematicienilor, ca în urma unei discuții cu un inginer, medic sau economist care ne solicită o consultație, să constatăm că îi putem fi de folos nu prin furnizarea unei tehnici matematice, ci a unui anume mod de a ordona faptele. Matematica este o excelentă școală de formare a gîndirii în etape, care ordonează lucrurile în ordinea complexității lor, care ordonează problemele după dificultatea lor, care dezvoltă spiritul metodic, de distingere a faptelor date de intuiție și experiență de cele care decurg logic din ele. Matematica dezvoltă gîndirea recurentă, ne învață să abordăm studiul proceselor cu o infinitate de etape prin reducerea lor la procesele cu un număr finit de etape. Cu ajutorul matematicii finite ne dezvoltăm gîndirea combinatorie. Analiza matematică ne formează gîndirea procesuală, discipline ca teoria probabilităților și teoria jocurilor stimulează gîndirea strategică, manipularea factorului aleator în studiul comportamentului uman. Tot matematica ne educă gîndirea analogică, ne dezvoltă capacitatea de a descoperi o structură comună în fenomene aparent foarte diferite. Matematica este o școală a descoperirii unor simplități profunde în unele fenomene care la prima vedere copleșesc prin multitudinea de parametri de care ele depind. Clarificările conceptuale atît

de necesare în probleme sociale cum ar fi cele legate de studiul nevoilor umane, al calității vieții, unde circulă un mare număr de accepțiuni ale aceluiași termen, se obțin cu ajutorul gîndirii matematice. Dacă am ști cum anume toate aceste potențialități ale gîndirii matematice pot fi făcute efective, educate, transmise tineretului care se pregătește să intre în profesie, am realiza o cotitură în sporirea randamentului profesional, o explozie de inteligență comparabilă cu ceea ce în domeniul energiilor reprezintă valorificarea noilor surse (nucleară, solară etc.). Desigur, uneori gîndirea matematică se manifestă ca o înclinare naturală, alteori este poate anihilată sau redusă datorită unei educații necorespunzătoare sau pur și simplu lipsei de educație. O persoană înzestrată cu o gîndire matematică deosebit de dezvoltată poate contribui cu idei, sugestii, procedee surprinzătoare, chiar dacă nu are cultură matematică. Să evocăm, în această ordine de idei, pe Francis Galton care, în secolul trecut, fără a fi propriu-zis matematician, a uimit lumea specialiștilor prin cîteva idei de pionierat, care nu au putut fi ignorate de teoria modernă a statisticii. În același timp, matematicienii înșiși produc uneori lucrări de o mare densitate de gîndire matematică, dar fără a utiliza matematica în sensul tehnic al cuvîntului. Ciclul de lucrări ale lui Gr. C. Moisil privind gramatica mecanică a limbii române este semnificativ în acest sens. Nu pledăm pentru un divorț al gîndirii matematice de limbajul matematic modern, dar nu putem nici eluda faptul că de multe ori limbajul matematic este folosit în absența gîndirii matematice, aducîndu-se în acest fel mari prejudicii colaborării matematicii cu celelalte discipline. Cea mai bună șansă a matematicii de a-și valorifica potențialul ei interdisciplinar este obținută prin demonstrarea caracterului inevitabil pe care utilizarea ei o are, prin eliminarea tuturor manifestărilor de intimidare a profanilor cu ajutorul unor terminologii și simbolistici ermetice, care nu se justifică în mod natural în raport cu scopul urmărit. Nu rareori reprezentările simbolice și formulele sînt un balast, un mod de a goni intuiția directă, de a epata pe profani. Matematica devine astfel un nou tip, deosebit de periculos, de demagogie. Dar în același timp trebuie să convingem pe specialiștii de orice fel că limbajul matematic le poate folosi cel puțin tot atît de mult ca o limbă străină de circulație internațională, mai mult chiar, ca cea mai importantă limbă după cea maternă. Orice beneficiar potențial al matematicii care nu poate înțelege și folosi limbajul ei, rezumîndu-se la preluarea acelor rezultate care pot fi traduse în limbajul

natural, va fi mereu handicapat, nu va avea acces la articulațiile interne ale gîndirii matematice. Iar dacă legea învățămîntului proclamă obligativitatea educației matematice pentru orice tînăr, este firesc, în prelungirea acestei situații, ca orice profesionist să utilizeze efectiv un limbaj pe care l-a învățat timp de cel puțin zece ani.

ÎNVAȚĂ-TE SĂ CAUȚI

Cercetarea științifică în rîndul elevilor trebuie apreciată nu în primul rînd după rezultatele obținute, ci după starea de spirit pe care o generează: o stare de spirit problematică, de căutare, de discernămînt critic.

Generarea acestei stări de spirit este obiectivul principal al învățămîntului. La realizarea ei concură toate formele de activitate cu elevii: lecțiile, examenele, cercurile cu elevi, activitatea practică, manualele, culegerile de probleme etc.

Formarea unui spirit de cercetare nu are un caracter elitar, nu se referă numai la elevii foarte buni, ci la toți elevii. Evident, randamentul lor va fi diferit, rezultatele nu vor fi aceleași, dar chiar randamentul unui elev de valoare mijlocie va fi superior în cazul în care este format într-o viziune problematică și va fi redus dacă este format într-o manieră descriptivă, de inventariere de cunoștințe.

Pentru elevii de valoare deosebită se pot organiza cercuri de matematică orientate spre o activitate de un caracter creativ mai accentuat. În nici un caz însă o atare activitate nu poate consta în aglomerarea elevului cu o cantitate mare de noi fapte matematice, în mare măsură anticipatoare ale chestiunilor care urmează a fi învățate în clasele ulterioare sau la facultate. La orice nivel, matematica oferă probleme deschise interesante, dar este important să se aprecieze gradul lor de dificultate; unele probleme elementare din punctul de vedere al enunțului pot fi mult mai dificile decît altele, care presupun o cultură matematică mai vastă.

În vederea dezvoltării gîndirii creative pot fi folosite diferite strategii, după cum urmează:

a) Accentul pe latura problematică a matematicii, în sensul explicării problemelor care conduc la introducerea unor noțiuni noi și care orientează dezvoltarea matematicii în anumite direcții și nu în altele.

b) Preocuparea de la punctul precedent trebuie, în mod natural, să ducă la dezvoltarea motivațiilor care stau la baza diferitelor chestiuni, incluzîndu-se aici atît motivațiile

externe, provenind din lumea fizică, biologică și socială (cum ar fi motivațiile fizice ale derivatei), cît și motivațiile interne, de ordin logic sau estetic.

c) Inflația de culegeri de probleme care s-a produs în ultima vreme este nocivă datorită faptului că cele mai multe exerciții și probleme propuse elevilor sînt lipsite de perspectivă, atît în ceea ce privește legătura slabă cu teoria matematică, cît și din punctul de vedere al eludării capacității matematicii de a modela lumea înconjurătoare.

d) Dezvoltarea potențialului interdisciplinar al matematicii, la nivelul matematicii școlare; există condiții optime de succes în această privință, datorită faptului că elevii studiază concomitent discipline dintre cele mai variate. Programa, manualele, culegerile de probleme, olimpiadele, examenele de admitere ar trebui completate printr-o orientare adecvată a activității cercurilor de elevi și practicii productive.

e) Spiritul creativ nu poate fi dezvoltat fără o dezvoltare corespunzătoare a atractivității matematicii.

Aceasta înseamnă stimularea interesului, curiozității elevilor pentru problemele în care sînt chemați să investească eforturi; în momentul de față, multe chestiuni din matematica școlară au o scadență foarte îndepărtată, fapt care frustrează pe elev de recompensa pe care o merită la capătul unui anumit efort. S-a ajuns astfel la situația în care matematica școlară este considerată de către mulți elevi o adevărată pedeapsă. Cercurile de elevi ar putea compensa parțial această lacună.

f) Ținînd seama de faptul că dezvoltarea calculatoarelor s-a constituit în cea de-a doua revoluție industrială, întreaga matematică școlară trebuie să se impregneze de acest spirit, acordîndu-se un loc primordial gîndirii algoritmice.

g) Monologului de la catedră trebuie să-i ia locul tot mai mult dialogul continuu, de tip socratic, dar și de alte tipuri. Rezultatele lucrărilor de control date elevilor trebuie discutate cu aceștia. Examenele trebuie să pună accentul nu numai pe control, ci și pe îndrumare.

h) Practica productivă trebuie să tindă a se apropia de activitatea la clasă și de aceea din cercuri.

În vederea realizării strategiilor de mai sus pot fi luate în considerare chestiuni de tipul următor:

A) Rolul funcției logaritmice în viața internă a matematicii și în modelarea matematică a lumii fizice, lumii biopsihice și lumii informaționale.

B) Folosirea ideii de convergență a unui șir sau a unei serii în înțelegerea unor procese cu o infinitate de etape, care

au loc în geometrie, în fizică, în logică și în alte domenii (Paradoxul lui Zenon, șirurile lui Fibonacci etc.).

C) Folosirea de probleme de tipul „Unde este greșeala?". Utilitatea lor este dublă: formarea spiritului de rigoare și punerea la încercare a cunoștințelor acumulate (de obicei, la asemenea probleme, multe răspunsuri propun greșeli fictive).

D) Propunerea de texte matematice (din unele cărți sau din lucrări ale elevilor sau pur și simplu confecționate special în acest scop) pentru un comentariu critic, care urmează să se refere nu numai la eventualele greșeli și nonsensuri, dar și la lungimi inutile, neclarități, ambiguități, deficiențe lingvistice, eleganță în expunere etc.

E) Folosirea de demonstrații de tip *descoperire* în locul celor de tip *verificare*. Primele, pornind de la o problemă, îi caută soluția, căutarea terminîndu-se prin formularea rezultatului găsit (de obicei sub forma unei teoreme); celelalte procedează invers: pornesc de la enunțul unei teoreme și apoi verifică adevărul ei. Din păcate, în multe cazuri activitatea didactică folosește exagerat cel de al doilea tip în dauna primului. Este evident că primul tip este de preferat din punctul de vedere al formării spiritului creativ.

DESCHIDEREA MATEMATICII

Cea mai mare parte a activității matematice — incluzînd aici și pe cea aplicativă — nu este astăzi efectuată de matematicieni de profesie, ci de specialiști ai altor domenii. Avem în vedere în primul rînd activitatea de cercetare. Însă ceea ce, din punctul de vedere al matematicianului, are un caracter aplicativ, se integrează de multe ori ca o componentă a cercetării fundamentale în fizică (folosirea geometriei diferențiale în teoria relativității), chimie (intervenția teoriei grafurilor în studiul structurilor isoprenoide), biologie (aplicarea teoriei limbajelor formale în genetică), economie (folosirea analizei matematice nonstandard în elaborarea unor modele ale economiei de schimb), psihologie (modelele probabilistice ale proceselor de învățare), lingvistică (modelele algebrice ale categoriilor gramaticale), muzică (studiul algebric al structurilor modale), arte vizuale (topologia formelor spațiale). Matematica fundamentală poate deveni subit aplicativă, așa cum s-a întîmplat cu unele capitole de teoria numerelor folosite în mod neașteptat în teoria automatelor sau în criptografie, după cum matematica aplicativă (cum

ar fi diferitele procedee matematice de clasificare și ierarhizare a unor obiecte depinzînd de mai mulți parametri) poate deveni instrument de lucru în ramurile aplicative ale altor discipline (de exemplu, în anchetele sociologice, în particular, pentru perfecționarea sondajelor de opinie publică). De fapt, tocmai atenuarea graniței dintre fundamental și aplicativ și legătura nemijlocită, aproape brutală, a teoriei cu aplicațiile în alte discipline constituie o particularitate importantă a multor orientări din matematica actuală. Pînă în urmă cu vreo 20—30 de ani eram obișnuiți ca între matematica fundamentală și cea aplicativă să se interpună cîteva nivele intermediare; de exemplu, o teorie matematică putea afecta un compartiment al fizicii teoretice, care la rîndul său influența un capitol de fizică experimentală și, prin aceasta, determina, ameliorarea unor procedee din tehnică, de unde pătrundea eventual în producție. Desigur, acest itinerar complicat rămîne în vigoare pentru multe cercetări actuale, dar concomitent s-a dezvoltat tot mai mult, luînd o deosebită amploare, o altă strategie a raporturilor dintre discipline. Încă în urmă cu 25 de ani, Grigore C. Moisil atrăgea atenția asupra aplicațiilor logicii matematice în ingineria circuitelor electrice. Un capitol al matematicii foarte aptopiat de filozofie și de fundamentele științei își dezvăluia un impact direct asupra ingineriei. Ulterior, acest fenomen a devenit deosebit de frecvent. Teoria sistemelor formale și teoria calculabilității, inițial capitole de matematică, situate la granița matematicii cu filozofia, au devenit baza întregii activități privind utilizarea calculatoarelor electronice. Stadiile intermediare aici sînt aproape absente. Cine ar putea să spună astăzi dacă problemele de complexitate a calculului aparțin logicii matematice sau informaticii? Chiar revistele internaționale de referate ezită în ceea ce privește încadrarea lor, repartizîndu-le uneori secțiunii de logică, alteori celei de informatică, dar avînd grijă în toate cazurile să le semnaleze în ambele secțiuni.

VINE CLIENTUL LA CROITOR SAU CROITORUL LA CLIENT?

Colaborarea matematicii cu celelalte discipline ia forme noi, care nu mai corespund schemei tradiționale, după care inginerul venea la matematician cu o anumită problemă

așa cum vine clientul la croitor; inginerul nu avea decît să transmită matematicianului enunțul clar al problemei sale, așteptînd apoi soluția, fără a pătrunde în laboratorul de lucru al matematicianului, tot așa cum clientul oferă croitorului o anumită cantitate de stofă, anumite informații, formulînd unele dorințe și așteptînd apoi costumul gata făcut, fără a fi interesat să vadă ce se întîmplă în atelierul de lucru al croitorului. Legătura matematicii cu celelalte discipline a devenit acum mult mai profundă. Să ne referim, de exemplu, la colaborarea matematicii cu economia. Într-o carte mai veche *(Mecanisme generative ale proceselor economice*, Editura Tehnică, 1981*)*, Gh. Păun, matematician, sistematizează cercetările sale privind utilizarea gramaticilor generative în studiul unor activități din industrie, comerț și transporturi. Noutatea teoretică și de concepție se împletește aici organic cu eficiența practică. Pe de o parte, autorul propune o nouă viziune asupra proceselor economice, pe de altă parte, este preocupat tot timpul de a conduce soluțiile pînă la stadiul de program de calculator. Teoria și practica economică beneficiază în egală măsură de aceste rezultate, după cum teoria gramaticilor generative se îmbogățește și ea cu unele idei, probleme și rezultate, își lărgește sensibil orizontul. O atare cercetare presupune o cultură profundă atît în domeniul gramaticilor generative cît și în unele capitole din economie. În cazul cărții menționate, autorul a răspuns în mod strălucit ambelor deziderate, cartea sa constituindu-se într-o adevărată premieră metodologică în domeniul economiei. Dar dacă ne-am imagina, în aceeași direcție de preocupări, o colaborare între un matematician și un economist, ea n-ar fi în nici un caz de tipul clientului care vine la croitor. Pentru a fi mai explicit, voi spune că foarte mulți își imaginează colaborarea interdisciplinară sub forma unor prestări de servicii. Nu negăm că există și această formă de colaborare; de exemplu, o întreprindere sau o instituție are de prelucrat un volum de date și se adresează unui centru de calcul, care prelucrează în mod rutinar datele respective, fără a se interesa de proveniența și semnificația lor. Dar forma creatoare de colaborare interdisciplinară este aceea în care partenerii sînt în egală măsură implicați într-o activitate de cercetare și fiecare dintre ei este condus în mod natural să pătrundă cît mai adînc în teritoriul celuilalt.

După aproape trei decenii de proliferare a fenomenelor de interdisciplinaritate, ne vom permite cîteva observații de ansamblu. Avem impresia că mai numeroase au fost succesele interdisciplinare realizate de cîte un singur autor, decît cele ale colaborării între autori provenind din discipline diferite. O radiografie a unor cazuri concrete ar fi semnificativă. Am putut urmări, de-a lungul mai multor ani, investigația întreprinsă de compozitorul Anatol Vieru în ceea ce privește sistematizarea aritmetică, ansamblistă și algebrică a modurilor și structurilor modale din muzică (a se vedea lucrarea sa *Cartea modurilor*, Editura Muzicală, 1980). Desigur, autorul a discutat de cîteva ori cu unii matematicieni, dar accentul l-a pus pe propria sa inițiere în anumite capitole de matematică, pentru că și-a dat seama că este nevoie să se impregneze de o anumită gîndire matematică, nu doar să aplice unele noțiuni și rezultate luate de-a gata din cărțile de specialitate. S-a orientat bine. A rezultat o fuziune a gîndirii muzicale cu gîndirea matematică. Un tînăr matematician, Dan Vuza, care a citit cartea lui Anatol Vieru, a descoperit în ea o problematică algebrică inedită și a dezvoltat o nouă sistematizare a „gîndirii intervalice" (denumire propusă de Anatol Vieru), dezvoltare din care compozitorul a extras noi semnificații muzicale ale modelului său și va fi stimulat să-și reia cercetarea și s-o aprofundeze. Acest dialog, această transmitere necontenită de ștafetă constituie aerul activității de cercetare.

Din exemplul discutat mai sus am vrea să desprindem și o altă idee. Forța interdisciplinară a matematicii nu constă numai (și poate nici măcar în primul rînd) în generalitatea conceptelor și instrumentelor pe care ea le elaborează, în faptul că ele se regăsesc în toate domeniile de investigație, ci și în tipul de gîndire pe care matematica îl promovează. Nu e ușor de descris această gîndire, de altfel ea are mai multe ipostaze și nici măcar un mare matematician nu excelează în fiecare dintre ele. Printre ele se află gîndirea analogică, gîndirea combinatorică, gîndirea algoritmică și gîndirea probabilistă, pentru a da numai cîteva exemple. Uneori, forța matematicii nu se manifestă la nivelul instrumentelor, conceptelor sau rezultatelor ei, ci sub forma gîndirii pe care ea o promovează. Poate acționa această gîndire în absența oricărei tehnici matematice? Răspunsul este categoric afirmativ. Această capacitate de a gîndi matematic fără a recurge

la jargonul matematic este chiar un test al unei bune asimilări a matematicii, după cum simbolurile și formulele pot camufla uneori absența gîndirii matematice.

SNOBISMUL MATEMATIC

Cu aceasta intrăm într-o altă problemă, intim legată de cele discutate mai sus. Așa cum matematica devine uneori inevitabilă, ea este alteori o formă de demagogie sau de snobism. Nu puține sînt lucrările în care simbolurile, terminologia și formulele matematice au o prezență pur decorativă, dacă nu chiar nocivă. A recurge la simbolismul matematic numai atunci cînd este nevoie și numai atît cît este nevoie, iată o cerință elementară a oricărei educații matematice, pe care din păcate nu reușim încă să o respectămp Mania jargonului matematic proliferează în publicații dintre cele mai variate, pentru a ascunde sau idei care puteau fi exprimate mult mai simplu și mai clar cu mijloacele limbajului uzual. sau absența oricărei idei. Eradicarea acestui fenomen a devenit o problemă socială, dar din păcate nici o instituție nu și-o poate asuma încă.

Totuși, unele progrese au fost înregistrate. Unele organisme de profil matematic își extind treptat raza de acțiune, luînd inițiativa de a urmări într-un mod mai sistematic lucrările de matematică publicate la diferite edituri. Dar cine urmărește modul în care matematica este utilizată de economiști, biologi, istorici, psihologi, sociologi, pedagogi, juriști, logicieni, geografi, esteticieni, arhitecți și mulți alți specialiști? Este adevărat că uneori, destul de rar, astfel de lucrări sînt date la referat și unui matematician. Dar s-au susținut destule teze de doctorat care se prevalau într-o măsură destul de mare de instrumentul matematic, fără ca printre referenți să existe un matematician. Organizarea cercetării și a publicațiilor științifice este încă insuficient de flexibilă pentru a se adapta la cerințele interdisciplinarității. Problema nu este ușoară și nu este numai una de organizare. Activitatea matematică este tot mai eterogenă. Nimeni nu are competența și forța de a o controla în întregime. Una este să controlezi corectitudinea utilizării unui instrument matematic, alta este să-ți dai seama de eficiența acestei utilizări. Uneori se întîmplă ca o lucrare care conține stîngăcii, chiar greșeli matematice, să propună totuși idei proaspete, mult mai interesante decît altele, prezentate cu toată acuratețea. A evalua caracterul periferic sau central al unor inadvertențe, a recupera

ceea ce prezintă o anumită valoare sau măcar o promisiune, iată o problemă delicată a activității matematice interdisciplinare, o problemă a cărei soluție nu poate fi decît tot interdisciplinară.

MATEMATICĂ ȘI SPORT

La sport — sau măcar la ideea de sport — ne întoarcem mereu, sub diferite forme și cu motivații diferite. În copilărie, sportul este în primul rînd plăcerea jocului; și pentru că, în mod spontan, energia copilăriei se cere cheltuită prin mișcare, sportul se constituie într-o preocupare majoră a copilului. De altfel, în această primă etapă a vieții, orice activitate își cere o motivație ludică, fără de care ea devine ceva impus, împotriva naturii.

Pregătirea fizică intervine esențial pînă și la șah. Dacă pentru sportivul de performanță pregătirea fizică este un mijloc de a-și menține un randament sportiv satisfăcător, pentru noi ceilalți raportul se inversează: sportul devine un mijloc — singurul existent — de a ne menține o bună condiție fizică. Nu este vorba aici numai de grija pentru sănătate, ci și de faptul că sportul este cea mai fericită alternativă a activității intelectuale, cea mai bună replică ce i se poate da. Într-un veac în care mai toate profesiile se intelectualizează, pretinzînd eforturi fizice din ce în ce mai reduse, această alternativă tinde să preocupe pe toți membrii societății. Ideea că a te odihni înseamnă a face altceva („Omul are dreptul la concediu după ce și-a făcut datoria să muncească. Cu totul altul e conceptul de „vacanță", despre care nu se mai vorbește. În vacanță omul continuă să muncească, dar muncește cum vrea", spunea Gr. C. Moisil, *Știință și umanism*, p. 124) nu trebuie înțeleasă numai în sensul recuperării forțelor, dar și sub aspectul măririi randamentului profesional. Tocmai prin distanța pe care și-o ia față de activitatea noastră profesională, sportul capătă o considerabilă funcție igienică, prin care creierul șterge toate reziduurile și se creează disponibilitatea și pofta pentru un nou efort intelectual.

Dar nu cumva această distanțare este în același timp o apropiere? Nu cumva în semnificațiile ei mai profunde, activitatea sportivă ne solicită și ne dezvoltă unele aptitudini în egală măsură necesare în activitatea de cercetare și de descoperire de orice fel? Gîndirea strategică, spiritul de luptă și de echipă, rezistența la eșecuri și capacitatea de a le

depăşi şi de a o lua, dacă e nevoie, de la capăt intervin în egală măsură într-un meci de fotbal sau de volei, într-o cercetare de laborator şi în pregătirea unui spectacol teatral sau a unui concert. Dacă în sport adversarul este o altă echipă sau se concretizează, pur şi simplu, în limitele de pînă ieri ale performanţelor corpului uman, în ştiinţă adversarul este natura care-şi ascunde cu viclenie secretele: sculptorul se luptă cu materia, iar poetul cu limbajul.

Iată de ce înţeleg foarte bine de ce mulţi dintre colegii mei matematicieni au îndrăgit alpinismul. Alţii au practicat fotbalul, înotul, rugbiul, voleiul, tenisul, şahul, despre ultimele două susţinîndu-se la Facultatea de Matematică din Bucureşti lucrări de diplomă foarte interesante. Deseori s-a întîmplat ca, întors de pe munte, un matematician să constate că a găsit soluţia unei probleme la care se gîndea de mult.

Dar desigur, cu vîrsta, practica sportului se restrînge, mulţi dintre noi mulţumindu-se cu drumeţia şi cu unele exerciţii de gimnastică. Însă interesul pentru sport rămîne viu. Dacă nu mai păşim pe terenul de fotbal, mergem cel puţin la stadion; iar cînd nu ne putem duce la stadion deschidem televizorul. Sportul — mai ales cel de echipă — este în foarte mare măsură şi un spectacol, pentru că are o mare doză de neprevăzut. Din acest punct de vedere, fotbalul, acest mare absent de la Universiadă, cum l-au numit atît de frumos redactorii revistei care i s-a dedicat, mi se pare a fi sportul-rege. El are, pentru a mă exprima în termenii teoriei informaţiei, cea mai mare entropie, deoarece în nici un alt sport nu este atît de greu de prevăzut, ca în fotbal, ce anume se va întîmpla în faza următoare a jocului. Poate că aici se şi află unul din secretele popularităţii acestui sport. Într-o vreme în care, tot mai mult, rutina şi stereotipia se instalează în numeroase compartimente ale vieţii sociale, oamenii tînjesc după o mişcare rapidă şi imprevizibilă, pe care fotbalul, mai mult poate decît alte sporturi, o realizează.

Dacă din imaginea copilăriei mele nu pot elimina pasiunea pe care o puneam ca mijlocaş stînga al echipei de fotbal a străzii, mai tîrziu, ca matematician, am constatat că sportul îmi pune la dispoziţie metafore dintre cele mai fericite ale unor procese delicate din Analiza matematică. Cînd, în urmă cu vreo 35 de ani conduceam o grupă de seminar de matematici superioare la Facultatea de Energetică a Institutului Politehnic din Bucureşti, prezenţa, în grupă, a studentei Lia Manoliu mi-a sugerat următoarea ilustrare a ideii de şir crescător, dar mărginit: fiecare aruncare a discului, deci şi recordurile Liei Manoliu, vor fi depăşite

de alte aruncări şi alte recorduri, acest proces fiind practic nelimitat. Dar există un prag, determinat de limitele imanente ale organismului uman, dar necunoscut, care nu va putea fi depăşit. (Orice şir monoton şi mărginit este convergent). Distincţia dintre existenţă şi construcţie apărea astfel accesibilă chiar şi începătorilor în ale Analizei matematice.

Momentul de tensiune pe care sportivul îl trăieşte în clipele de maximă concentrare îşi are un bun frate în momentul de inspiraţie al savantului şi al artistului. Pe toţi îi uneşte ambiţia autodepăşirii. Iar diplomaţii care, adunaţi în jurul meselor rotunde, discută marile probleme ale omenirii, pot primi şi ei sugestii utile din domeniul comportamentului sportiv.

A FI OM CULT

Dacă, aşa cum am putut vedea de mai multe ori în cele de mai sus, matematica nu constituie numai o tehnică de lucru, ci şi o parte a culturii umane, dacă ea nu este alcătuită numai din mijloace de operare, ci şi din idei, teorii, analogii cu alte discipline, intuiţii, ipoteze şi probleme sugerate de preocupări dintre cele mai variate, atunci, pentru a înţelege matematica într-o perspectivă culturală, este important să vedem ce înseamnă azi a fi om cult.

Aş compara evoluţia conceptului de om cultivat cu aceea a limbajului poetic. În perspectiva vechii retorici, poezia era un simplu ornament al limbajului cotidian, după cum, în mentalitatea care dăinuia încă puternic în urmă cu cîteva zeci de ani, cultura era un simplu ornament al personalităţii umane. În conformitate cu această gratuitate a culturii, conţinutul ei era redus la cîteva elemente care puteau fi mai uşor demonstrate în public: cunoaşterea unor limbi străine, o oarecare iniţiere în problemele filozofiei, artei şi literaturii.

Ceea ce lipsea în primul rînd vechii înţelegeri a culturii (şi, din păcate, urmele ei persistă încă) era capacitatea de sesizare a legăturii ei cu întreaga viaţă socială. Desigur, astăzi funcţia socială a culturii este unanim recunoscută. Problema este însă cum anume ne reprezentăm acea structură de om cultivat care răspunde cel mai bine comenzii sociale actuale. Ce înseamnă a fi cult în propria ta profesie? Ce înseamnă a fi cult în afara profesiei tale şi în ce măsură o atare cultură răspunde şi ea unei nevoi sociale?

Dificultatea cea mai mare în formarea unei reprezentări corecte a ideii de om cult decurge din faptul că efectul profund al culturii nu este de obicei imediat și explicit, ci îndepărtat și ascuns. Din păcate, sîntem prea des obsedați de ceea ce trebuie să facem imediat și nu mai acordăm atenția cuvenită chestiunilor de perspectivă. Să ne referim, de exemplu, la una dintre profesiile-cheie, azi în plină ascensiune, aceea de informatician. Să presupunem că este vorba de un informatician de formație universitară. Dacă lui i se cere — așa cum, din păcate, se întîmplă uneori — numai elaborarea unor programe standard, de rutină, cultura sa universitară va fi foarte puțin valorificată și foarte slab stimulată a se dezvolta. Randamentul său profesional va crește substanțial dacă el va fi stimulat să descopere noi posibilități de utilizare a calculatorului în proiectare, în documentare, în creșterea productivității, în tipizarea produselor industriale. A fi om cultivat în profesie înseamnă a sesiza tocmai aceste posibilități de trecere la o calitate superioară și de a milita pentru realizarea lor fără a te lăsa descurajat de o posibilă lipsă de receptivitate. Un om cultivat este un om care vede mai departe decît ceilalți. Aceasta înseamnă că el nu va aștepta să i se ceară să treacă dincolo de rutină, ci va provoca această trecere. În măsura în care acest dialog între individ și colectiv nu decurge în mod normal, printr-o acțiune de stimulare reciprocă, pot apărea situații critice. Cultura profesională este mult stimulată de o receptivitate corespunzătoare, după cum posibilitatea ei de a se manifesta nu implică numai o satisfacție personală a celui în cauză, ci și o creștere sensibilă a eficienței acțiunii sociale.

Este destul de răspîndită o mentalitate ușor demagogică despre omul cult, după care unii specialiști consideră că o parte, mereu mai mare, din specialitatea lor ar trebui să intre în cultura generală a oricărei persoane care se respectă. Ca urmare, programele și manualele școlare și universitare ar urma să se încarce mereu cu noi și noi chestiuni care, luate în parte, ar putea prezenta desigur interes, dar a căror totalitate depășește, cel puțin din punct de vedere cantitativ, orice limite rezonabile privind posibilitățile de asimilare ale unei persoane cu o capacitate intelectuală normală. Întîlnim deseori specialiști care se scandalizează pentru faptul că cutare operă, noțiune, descoperire sau personalitate din domeniul său nu este suficient de cunoscută de către publicul larg. Propuneri de a se adăuga noi chestiuni la programele existente, sub motivul că este de neconceput ca un tînăr al zilelor noastre să nu le cunoască, apar mereu

în presă, se fac mereu auzite în consiliile profesorale ale liceelor, facultăților.

Oare aceasta să însemne în primul rînd cultura? O inventariere chiar parțială a acestor propuneri ar arăta că nimeni nu satisface un barem de acest fel. Este riscant să se stabilească un barem de cunoștințe ale omului cult. Cultura nu este în primul rînd asimilarea de date, ci mai degrabă o anumită deschidere intelectuală, o anumită capacitate, mereu reînnoită, de învățare, este aptitudinea de a opera nu numai cu informații, ci și cu valori. Omul cult acumulează diferențiat și cu măsură. Actul de cultură nu este numai unul de asimilare, ci în egală măsură și unul critic, de selecție, renunțare și respingere. Dar cît de rar se fac propuneri în acest sens!

Nu este vorba, în toate acestea, numai de o strategie individuală, ci și de o cerință socială. Din ce în ce mai multe profesii pretind un nivel din ce în ce mai ridicat, din ce în ce mai multe informații trebuie selectate și prelucrate, din ce în ce mai multe probleme globale ale dezvoltării omenirii reclamă un dialog permanent între popoare, iar dificultatea supraviețuirii radicalizează multe situații pînă mai ieri calme.

Cel puțin trei consecințe decurg de aici.

Mai întîi, *cultura nu mai poate fi redusă, ca în trecut, la fondul ei filozofic și literar-artistic, ci include deopotrivă un orizont ideologic și științific-tehnic corespunzător.*

În al doilea rînd, *omul cult nu se mulțumește să înțeleagă cît mai multe dintre procesele care au loc în jurul său, ci caută să le diferențieze și să le ierarhizeze* în raport cu anumite valori de adevăr, iubire, dreptate și frumos, în care crede.

În al treilea rînd, *cultura nu se poate reduce la cunoaștere și valoare, ea trebuie să cuprindă și acțiunea, participarea. Omul cult de astăzi nu mai este numai unul care știe multe și care aderă la anumite valori umaniste, ci și unul care acționează în sensul folosirii a ceea ce știe și al promovării valorilor la care aderă.*

MATEMATICA — ȘTIINȚĂ ARISTOCRATICĂ?

Matematica pură este tot atît de bine o expresie pleonastic (pentru că matematicii îi e proprie o puritate logică), da și o contradicție în termeni (deoarece, oricît de abstract ar fi, matematica e contaminată de idei și structuri extra matematice).

Între matematică și rest sînt prea multe verigi intermediare, pe care cei mai mulți nu le înțeleg și nici nouă, matematicienilor, nu ne e ușor să le explicăm. De aceea, chiar admirația care ne este adresată vine de multe ori mai degrabă dintr-un sentiment de inaccesibilitate decît dintr-unul de reală apreciere.

Ar trebui ca matematicienii să fie priviți ca și poeții. Lumea să fie mulțumită că ei există. Din păcate, matematicienii nu pot să placă precum poeții.

Matematica este o știință aristocratică, în sensul că ea ajută numai acele domenii de activitate care sînt suficient de dezvoltate. Ea este o știință care, chiar atunci cînd pornește nemijlocit de la structurile lumii reale, trebuie să tragă consecințele tuturor acestor premise, ipoteze. Această combinatorică infinită a consecințelor îl duce pe matematician la crearea unor universuri care, în aparență, nu mai au legătură cu lumea reală. Dar, din punct de vedere profesional, trebuie explorate și acestea, chiar dacă nu se vede, pentru moment, unde duc. Cînd a apărut geometria neeuclidiană, ea a putut părea un simplu joc. Posibilitatea de a se construi geometria fără a se presupune că dintr-un punct la o dreaptă se poate duce o singură paralelă nu părea să influențeze înțelegerea naturii înconjurătoare. Ulterior însă, prin teoria relativității, s-a dovedit că lucrurile nu stau așa. Matematica este strîns legată de lumea reală. Marii matematicieni au fost totdeauna conștienți de impactul social al matematicii, chiar dacă uneori s-au alintat și și-au exprimat rezerve în legătură cu funcția ei de cunoaștere. Am dat mai demult de un caiet de însemnări al marelui nostru matematician Simion Stoilow. Ce convingător demonstra, în urmă cu peste 60 de ani, legătura matematicii cu lumea reală! Ea constă, de pildă, în legătura tot mai strînsă cu producția. Astăzi, mulți ingineri și economiști ne cer să rezolvăm probleme din sectoarele lor de activitate. Se realizează o concretizare a raporturilor pe care le are matematicianul cu sfera producției materiale. Am să dau un exemplu: colegul meu Nicolae Cristescu a încheiat contracte cu Institutul de Prospecțiuni Geologice în legătură cu dimensionarea structurilor de rezistență în minele de sare. În urmă cu patru decenii nu se putea imagina o atare colaborare.

Acum un secol și jumătate, oameni cu dragoste de carte și de popor editau primele manuale — un Asachi, un Gheorghe Lazăr, un Heliade ... Ei au creat limbajul prin care știința a fost pusă la îndemîna poporului. E o lecție de înalt patriotism pe care trebuie s-o continuăm. Astăzi se petrece

un fenomen asemănător. Asistăm la un nou iluminism. Cu matematica superioară trebuie să facem ce s-a făcut atunci cu matematica elementară. S-o răspîndim printre cîţi mai mulţi specialişti nematematicieni. Sarcina de acum e mai complexă, mai dificilă.

RIGOARE ŞI COMPETENŢĂ

Fiind vorba despre *rigoare*, să procedăm în mod riguros. *Dicţionarul explicativ al limbii române* dă în dreptul acestui cuvînt următoarea explicaţie: asprime, severitate, stricteţe, străşnicie. Dintre aceşti patru termeni, cel care se asociază mai natural cu competenţa este *stricteţe*, în dreptul căruia, în acelaşi dicţionar, stă scris: rigurozitate, severitate, asprime. Eşuînd în încercarea de a folosi dicţionarul, să folosim totuşi sugestiile lui. La ce se referă strictetea? Îmi amintesc de o inscripţie pe un zid: „Murdăria strictă". De unde provine caracterul ilariant? Strictetea presupune anumite *reguli* care trebuie respectate. Putem spune, deci, că *rigoarea constă în conformitatea cu un anumit sistem de reguli*. Fără precizarea acestui sistem, sensul rigorii nu este clar. Putem înţelege astfel şi *caracterul istoric* al rigorii. În matematică, de exemplu, exigenţele de rigoare au evoluat mult. Sistemul de reguli care stau la baza gîndirii şi limbajului matematic a fost mereu ameliorat, în aşa fel încît ceea ce ieri era considerat forma supremă a rigorii astăzi aparţine matematicii informale, intuitive, chiar naive. A se vedea, de exemplu, teoria naivă a mulţimilor, expresie a matematicii celei mai riguroase existente în urmă cu o sută de ani, şi teoria axiomatică a mulţimilor, edificată în secolul nostru.

În funcţie de ce criterii se modifică sistemul de reguli? În funcţie de evoluţia teoriilor ştiinţifice, a exigenţelor metodologice şi teoretice, a preciziei cerute în aplicaţii. Orice mutaţie în materie de rigoare a fost determinată de o anumită criză, constînd fie în apariţia unor antinomii, fie a altor dificultăţi, cum ar fi imposibilitatea de rezolvare a unor probleme importante, capacitatea explicativă redusă a teoriilor existente etc. Trecerea la un nivel superior de rigoare a fost totdeauna însoţită de o *reconsiderare a fundamentelor* şi de o renovare a *limbajului ştiinţific*. În acelaşi timp, trebuie să observăm că, într-o anumită măsură, tipul de rigoare adoptat la un anumit moment de un domeniu sau altul al cunoaşterii are un *caracter convenţional*. Dar, de fapt, un acelaşi domeniu lucrează concomitent cu mai multe nivele de

rigoare, după natura problemelor abordate. Astfel, în matematică cercetările privind fundamentele sau problemele de logică matematică adoptă un grad superior de rigoare față de cele privind ecuațiile diferențiale sau teoria grupurilor. Necesitatea folosirii concomitente a mai multor grade de rigoare este determinată și de faptul că este nevoie să se mențină contactul cu sursele intuitive ale conceptelor, teoriilor și problemelor. Unii oameni de știință chiar definesc rigoarea ca *detașare de considerațiile intuitive*; din acest punct de vedere, riguros ar fi acel demers care, respectînd anumite reguli logice, nu riscă să se contamineze de nesiguranța și imprecizia intuițiilor noastre.

Iată însă că despre rigoare se vorbește foarte mult și în artă, în literatură, în activitățile practice. Un singur exemplu. Într-un eseu despre Ion Barbu, Marin Mincu afirma (p. 288—289); „Construcțiile sistematice ale criticii par să demonstreze riguros intuiții mai vechi și scepticismul unora în ceea ce privește justificarea acestor sisteme derivă de aici. Dar empirismul, chiar cînd e sprijinit pe bun gust, eșuează adeseori într-o rutină obositoare, căci numai cu talentul în critică nu se ajunge prea departe. În general, refuzul metodei divulgă refuzul rigorii. Se face abstracție de un lucru elementar în asemenea cazuri; nu intuițiile lipsesc, ci demonstrația coerentă a acestora într-un sistem articulat". Observăm aici, alături de opoziția riguros-intuitiv, introducerea în discuție a unui alt aspect: *echivalarea rigorii cu adoptarea unei metode*. Riguros ar fi deci ceea ce se reclamă de la o anumită metodă. Încercînd să dezvoltăm mai departe această idee, putem spune că *rigoarea intră în opoziție cu procedurile ad-hoc*. Marcel Pop Corniș (în *Luceafărul* din 26 martie 1983, p. 6) preia citatul de mai sus ca o replică la punctul de vedere al lui Șerban Cioculescu, după care *progresul criticii nu constă în metoda generală, ci în „l'esprit de finesse" al fiecărui critic, în puterea lui de pătrundere personală și de expresie cuceritoare*. În acest fel, *rigoarea este echivalentă cu acel „spirit geometric" pe care Pascal îl opune spiritului de finețe*. Acum știm că această opoziție este de fapt opoziția dintre activitatea emisferei stîngi și aceea a emisferei drepte a creierului uman și că echilibrul și conlucrarea acestor două tipuri de activitate cerebrală sînt nu numai salutare în orice activitate creatoare, ci și necesare pentru sănătatea noastră psihosomatică. Mai exact, emisfera cerebrală stîngă controlează cu preponderență activitățile secvențiale (limbajul și logica în primul rînd), iar cea dreaptă se referă în primul rînd la activitățile de con-

comitență (preponderente în emoții și intuiții, unde imediatețea și globalitatea sesizărilor sînt esențiale). *Un indice important al calității vieții este echilibrul dintre aceste două tipuri de activitate.* Multe dintre anomaliile culturii, învățămîntului, activităților creatoare rezultă din nerespectarea acestui echilibru care, după cum s-a putut vedea mai sus, este în bună măsură echilibrul dintre rigoare și intuiție, dintre rigoare și procedare ad-hoc. *Oricum am înțelege rigoarea, ea își are sediul cu precădere în emisfera cerebrală stîngă.* Dat fiind însă că, așa cum am văzut, există diferite tipuri de rigoare, problema este de *a nu se impune unei activități o rigoare de un alt tip decît acela care i se asociază ei în mod natural.* Desigur, evoluția cunoașterii umane poate promova, în anumite domenii, tipuri de rigoare considerate ieri inadecvate, dar aceste transformări nu pot fi impuse în mod brutal. Intervine esențial procesul de învățămînt, colaborarea interdisciplinară, deschiderea față de nou, capacitatea de ieșire din rutină etc.

Ne-am apropiat astfel de problema competenței. În *Dicționarul explicativ al limbii române* citim despre competență: *capacitatea cuiva de a se pronunța asupra unui lucru, pe temeiul unei cunoașteri adînci a problemei în discuție; capacitate a unei autorități, a unui funcționar etc. de a exercita anumite atribuții.* Lăsînd de o parte aspectul administrativ-juridic, competența, în sensul de mai sus, nu poate fi dobîndită decît prin fuziunea unor factori înnăscuți cu alții, dobîndiți. Un rol esențial îl are aici procesul de învățare creatoare, care, bazîndu-se pe mecanismele înnăscute ale creierului și orientînd în mod adecvat activitatea empirică de interacțiune a stimulilor și răspunsurilor, conduce la formarea unor competențe superioare. Succesul învățării este condiționat de adecvarea experienței umane la particularitățile individuale înnăscute (echilibrul dintre empiric și reflexiv) și de stimularea conlucrării armonioase a celor două emisfere cerebrale (echilibrul dintre logic-verbal și intuitiv-emoțional). Este deci clar că *dobîndirea unei competențe implică și dobîndirea unui tip corespunzător de rigoare.*

Într-un sens mai modern, competența este definită în relație cu performanța. Competența unui subiect în raport cu o anumită activitate este ansamblul posibilităților de care el dispune în această privință. Performanța este modalitatea efectivă de desfășurare a activității respective. Relația competență-performanță ar fi deci relația potențial-real. Cunoașterea vocabularului și gramaticii unei limbi ar fi competența vorbitorului acelei limbi, în timp ce folo-

sirea ei efectivă ar defini performanța sa. În mod vizibil, competența revine la un ansamblu de reguli, deci este supusă unei anumite rigori; iar respectul acestor reguli condiționează în bună măsură calitatea performanței noastre lingvistice.

Creșterea gradului de creativitate este inevitabil legată de trecerea la o competență superioară.

„SPECTACOLUL MATEMATICII"

O carte cu titlul de mai sus a apărut în 1983 la Editura Albatros și aparține lui Gh. Păun.

Desigur, experiența și calitățile de cercetător îl favorizau pe Gh. Păun în încercarea de a prezenta matematica unui public mai larg; nu chiar „omului de pe stradă", cum se exprimă el, urmînd în această privință un clișeu foarte răspîndit, dar, oricum, unor largi pături ale tineretului studios și multor oameni de cultură (inclusiv umaniști) care au exercițiul intelectual necesar al parcurgerii unui text în care dependența fiecărui alineat de alineatele precedente este totuși mai mare decît cea obișnuită. O altă circumstanță care-l favoriza pe autor era faptul că experiența sa științifică îl familiarizase în egală măsură cu matematica fundamentală (a se vedea numeroasele sale publicații în teoria limbajelor formale, răspîndite în reviste internaționale dintre cele mai prestigioase și mai exigente) și cu cea aplicativă. Vocația interdisciplinară a autorului s-a manifestat nu în domeniile clasice, tradiționale, de utilizare a instrumentului matematic (cum ar fi fizica sau chimia), ci în domenii social-umaniste, mergînd de la economie și sociologie pînă la semiotică, teatru, folclor și lingvistică, fără a mai pune la socoteală faptul că Gh. Păun este și un informatician distins, cu rezultate în studiul sintaxei limbajelor de programare.

Cu o atare carte de vizită, autorul avea o șansă foarte bună de a reuși în întreprinderea sa de față. O apreciere a rezultatului pe care l-a obținut este în funcție de termenul de referință pe care-l adoptăm. Dacă, de exemplu, ne referim la ceea ce a publicat pînă acum Editura Albatros în materie de cultură matematică, vom constata că sînt prezentate pentru prima oară publicului unele capitole importante de matematică necantitativă. Să mai observăm că rareori s-a întîmplat ca într-o lucrare adresată nespecialiștilor grija de a fi la zi cu ideile și rezultatele prezentate să se manifeste atît de pregnant ca în cartea de față. În prezentarea

teoremei lui Arrow, a problemei celor patru culori, a problemelor lui Hilbert și a ecourilor teoriei catastrofelor, autorul merge pînă la cea mai proaspătă informație. În mod deosebit trebuie să accentuăm valoarea unor capitole în care autorul prezintă propriile sale rezultate sau rezultate obținute în colaborare: teorema de imposibilitate a agregării indicatorilor, gramatica proceselor economice, gramatica creierului. Aici, cu deosebire, se simte autenticitatea lucrurilor trăite. Desigur, verva autorului se manifestă și în prezentarea unor chestiuni care, fără să-i aparțină, se află totuși în acele zone ale științei pe care le-a frecventat cu asiduitate, al căror aer l-a respirat și care i-au devenit deosebit de familiare în activitatea sa de cercetare: teorema lui Arrow, teoremele lui Gödel, algoritmii, gramaticile formale, calculatoarele. Este interesant însă faptul că, chiar în prezentarea unor chestiuni mai depărtate de preocupările sale personale și de domeniul său de activitate, autorul găsește modalități fericite de prezentare accesibilă a ideilor de bază, imaginează situații revelatoare care plasticizează conceptele. Două exemple în acest sens: ideea șarpelui în prezentarea mulțimilor fuzzy și ideea aducerii în prim-plan a abaterii infinitezimalelor de la axioma lui Arhimede, în prezentarea analizei nonstandard. Desigur, asemenea „găsiri" scurtează, simplifică drumul spre cititor, dar în ansamblu cartea scrisă de Gh. Păun nu-l scutește pe lector de un anumit efort intelectual, net superior celui cerut de lectura unui roman polițist, de exemplu. În aceasta constă unul din marile merite ale cărții. Dacă ea s-ar fi mărginit la partea anecdotică a lucrurilor (căreia autorul îi face concesiile cuvenite), atunci, dincolo de o lectură agreabilă, cîștigul cultural al cititorului ar fi fost nul. Chestiuni ca teoremele lui Gödel, Arrow, teoria catastrofelor, cele relative la polinoame, la criptologie (noi știam că se spune *criptografie*) și atîtea altele cer din partea cititorului o stăruință corespunzătoare și nu pot fi parcurse fără creion și hîrtie. Înțelepciunea după care în știință nu există drumuri pentru regi rămîne în întregime valabilă. Deosebirea dintre o carte ca cea de față și una de matematică aridă nu stă atît în diferența de efort, cît în diferența de recompensă pe care ele o oferă în schimb.

Un element original al cărții de față — și care ține și el de personalitatea autorului — este frumoasa obsesie a literaturii SF, care, dacă nu exista, trebuia probabil inventată cu scopul de a face știința mai agrealabilă.

Citind întregul text cu mare atenție, am acumulat o serie întreagă de observații cu caracter local, pe care nu este locul

să le prezentăm aici. Desigur, rămîn și o serie de chestiuni de ansamblu care pot să fie discutate, cum ar fi lectura teoremelor de imposibilitate ca limite ale matematicii, modul de discutare a definirii matematicii, logica succesiunii capitolelor. Dacă adoptăm, ca idee globală a lucrării, metafora teatrală propusă de autor, am fi putut pretinde, măcar ca un pretext, un fir de legătură, care există pînă și între diferitele momente ale unui spectacol de estradă.

Dacă raportăm lucrarea la ansamblul lucrărilor de cultură matematică generală publicate la noi în țară, trebuie să constatăm că cele mai multe lucrări din categoria celei de față au fost mai degrabă traduceri decît lucrări originale. Ne-am risipit prea mult în matematică distractivă, elementară, cu o prea slabă funcție cognitivă și aplicativă. Acest fapt a contribuit și el la formarea, în rîndul publicului, a unei idei greșite despre matematică în general. Lucrarea de față are meritul de a prezenta, în cea mai mare parte a ei, idei și rezultate de o mare valoare culturală, al căror interes nu stă numai în gimnastica intelectuală pe care o prilejuiesc, ci și (și de fapt în primul rînd) în lărgirea considerabilă a orizontului intelectual al cititorului.

Dacă raportăm lucrarea la exigențele actuale ale difuzării culturii matematice, ea reprezintă desigur o parcelă pe un teren față de care editurile noastre vor manifesta, sperăm, un interes tot mai mare.

MATEMATICA ȘI PUBLICUL EI

Un articol al marelui geometru Gheorghe Vrănceanu, publicat în „Contemporanul" în urmă cu mai mulți ani, avea un titlu pentru multă lume șocant: *Matematica pentru cei mulți*. Într-adevăr, este foarte răspîndită prejudecata după care matematica nu poate fi înțeleasă decît de un număr restrîns de oameni, dotați cu deprinderi speciale în acest sens. De-a lungul anilor, această idee a mocnit în multe creiere (inclusiv unele creiere de matematicieni), fără ca ea să deranjeze pe cineva. De cîteva decenii însă, această concepția aristocratică asupra matematicii vine în conflict cu comanda socială. Noul nivel de profesionalitate pe care -l reclamă tot mai multe discipline, tot mai multe activități practice, nu poate fi atins fără o cultură matematică adecvată. După ce ne-am tot întrebat dacă educația matematică este posibilă, constatăm că ea ni se impune, devine o obligație.

Problema este vastă și complexă. Ea preocupă atît guvernele cît și universitățile, pe oamenii de știință, pe educatori, pe intelectuali, în genere, în mai toate țările. Sînt folosite toate mijloacele comunicației de masă. Părinții urmăresc cu îngrijorare pregătirea matematică a copiilor. Desigur, răspunderea principală, în ceea ce privește educația matematică, revine învățămîntului. Dar cartea didactică are nevoie să fie suplimentată de cartea de cultură matematică liberă de restricțiile impuse de programele de învățămînt. Dincolo de manuale și de tratate grave, uneori chiar morocănoase, matematica își caută o formă mai agreabilă, mai puțin tehnică, mai bogată în motivații și în conexiuni cu celelalte compartimente ale culturii. Avem, deci, nevoie de mai multe cărți autohtone de cultură matematică de o audiență ceva mai largă. Atît experiența străină, cît și cea românească arată că cele mai multe reușite în această direcție aparțin unor oameni de știință care au excelat mai întîi în activitatea de cercetare. A scrie o carte de cultură matematică într-un stil în care limba naturală precumpănește față de jargonul matematic propriu-zis nu este o activitate de ordinul al doilea nici ca dificultate, nici ca importanță; dimpotrivă, presupune o vastă experiență științifică și umană, un interes crescut pentru modul în care publicul reacționează la fenomenul matematic.

Matematica românească are frumoase tradiții în această privință. Gheorghe Țițeica, primul nostru mare geometru, se adresa tineretului prin zeci de articole de cultură științifică publicate în „Gazeta matematică" (de exemplu, inițiindu-i pe cititori în topologie într-un moment în care această disciplină era încă foarte tînără), iar în revista „Natura" (pe care o conducea împreună cu G. G. Longinescu) trata teme de o mare varietate, de la cuadratura cercului la structura rimelor și de la viteza luminii la legătura matematicilor cu natura. Traian Lalescu publica, în 1922, în „Cugetul românesc" un ciclu de „Convorbiri relativiste" într-un moment în care teoria relativității generale abia apăruse; la fel de prompt a reacționat, cu o broșură în colecția „Cunoștințe folositoare", la apariția telegrafiei fără fir. Un alt mare matematician român, Simion Stoilow, combătea ideea inaccesibilității matematicii, dînd, în acest sens, exemplul unui matematician celebru, Hans Hahn, care în cîteva broșuri reușise să inițieze pe unii intelectuali nematematicieni în ideile de bază ale calculului diferențial și integral și ale geometriei analitice și diferențiale. Mai aproape de noi, stăruie în amintirea noastră harul cu care Gr. C. Moisil captiva atenția

unui auditoriu divers cu probleme care sînt, de obicei, considerate aride. Care este situația astăzi? Cine a preluat această ștafetă purtată altă dată de cei mai de seamă matematicieni români? Vom aduce în atenție pe cîțiva dintre aceștia, care prin modestia lor exemplară aruncă o umbră de anonimat unei activități de o deosebită însemnătate socială.

Figura care se detașează cu precădere este aceea a profesorului Florica T. Câmpan, de la Universitatea „Al. I. Cuza" din Iași. Specialistă în geometrie diferențială și istoria matematicii, ea s-a consacrat, de vreo 20 de ani, elaborării unor lucrări care situează faptele matematice în contextul lor istoric și cultural și le conferă un caracter accesibil și agreabil. O lucrare ca *Vechi și nou în matematică*, publicată la Editura Ion Creangă, deci explicit adresată adolescenților, este o apariție unică în țara noastră; ea cîștigă repede și pasiunea cititorului adult, inclusiv a matematicianului. Cartea cea mai recentă, *Licuricii din adîncuri sau Convorbiri despre fundamentele matematicii* (Editura Albatros, 1983), conține foarte puține formule, dar foarte multă gîndire matematică. Ca și în unele lucrări anterioare ale autoarei (a se vedea, de exemplu, cele trei volume din colecția „Lyceum" a Editurii Albatros, dedicate prezentării unor probleme celebre din istoria matematicii), metoda preferată este dialogul. Alegerea nu este întîmplătoare. Florica T. Câmpan urmărește să pună în evidență aspectele controversate ale matematicii. Interlocutorul imaginar (sau real!) ne amintește de interlocutorul-scriitor al lui Rozsa Péter din *Jocul cu infinitul* (carte tradusă la noi în urmă cu aproape trei decenii). În strategia autoarei, acest interlocutor este o aproximare a cititorului. Nedumeririle exprimate de interlocutor sînt cele pe care autoarea le bănuiește la cititor.

În urmă cu cîțiva ani, aflîndu-mă la Bacău, cu prilejul unei întîlniri cu elevii Liceului „George Bacovia", am întrebat dacă li se întîmplă să citească matematică în vacanță, de plăcere, fără nici un interes imediat. După o scurtă tăcere, o elevă mi-a spus: „Da, în vacanța de vară am citit *Istoria numărului pi* de Florica T. Câmpan (amintim că această carte a fost tradusă în U.R.S.S. și R.P. Bulgaria), iar în vacanța următoare am de gînd să citesc *Aventura geometriilor neeuclidiene* a aceleiași autoare". Cîți autori se pot lăuda de a fi scris o carte de matematică pe care școlarii s-o citească nu în vederea unui examen, ci exclusiv din plăcere?

Un autor talentat, care și-a făurit propriul său stil, este Viorel Vodă, cercetător valoros în domeniul statisticii matematice. Cel mai recent volum al său, *Vraja geometriei demo-*

date (Editura Albatros, 1983) constituie, ca și alte două volume anterioare (dintre care amintim aici pe cel cu titlul metaforic *Triunghiul, ringul cu trei colțuri*) o pledoarie pentru geometria elementară. Tot Viorel Vodă este unul dintre îngrijitorii volumului *Pagini inedite* de Dan Barbilian — Ion Barbu (Editura Albatros, 1981). Remarcabila vervă a acestui autor s-a manifestat mai puțin într-o altă carte a sa *Gîndirea statistică — un mod de gîndire al viitorului*, față de titlul căreia Viorel Vodă rămîne încă dator și nu ne îndoim că își va îndeplini cu strălucire această datorie, dînd, și aici, întreaga măsură a posibilităților sale. Talentul narativ al lui V. Vodă este capabil să transforme într-o poveste agreabilă zonele reputat aride ale statisticii matematice, domeniu atît de important pentru celelalte științe.

Mai tînăr decît Viorel Vodă, dar cu o carte de vizită impresionantă pentru un matematician care abia a împlinit 36 de ani (autor a patru monografii și a peste o sută de articole de specialitate, laureat al premiului Gh. Lazăr al Academiei pe anul 1981), cercetătorul Gheorghe Păun, specializat în teoria limbajelor formale și a aplicațiilor lor, excelează și în ceea ce privește propagarea culturii matematice. După ce, în 1982, a publicat, în colaborare cu un alt tînăr matematician de valoare, Cristian Calude, *Modelul matematic — instrument și punct de vedere* (Editura Științifică și Enciclopedică), ne surprinde cu o apariție care aduce o notă nouă în viața noastră editorială: *Din spectacolul matematicii* (Editura Albatros, 1983). Rezultate matematice dintre cele mai dificile și mai recente sînt aici prezentate într-un mod relativ accesibil, care captivează atenția cititorului, atrăgîndu-i atenția asupra implicării decisive a gîndirii matematice în probleme practice umane și sociale, dintre cele mai acute. Ecouri care mi-au parvenit din partea unor colegi de profesii dintre cele mai variate îmi confirmă excelenta impresie inițială. Dar despre această carte am discutat într-un paragraf special.

Sînt numai cîteva exemple, dar semnificația lor ni se pare considerabilă.

EXEMPLUL TINERILOR MATEMATICIENI

Situația la Facultatea de Matematică este relativ bună, studenții fiind contaminați de spiritul de cercetare dominant printre cadrele didactice. Mă voi referi însă la o situație mai generală. Într-o altă ordine de idei, nu este ușor a-i recomanda unui student o problemă de cercetare potrivită

atît ca grad de dificultate, cît și din punctul de vedere al culturii științifice pe care o presupune. Mai este necesar ca studentul care se implică în cercetare să găsească la cei din jur înțelegerea necesară, să-și poată face timp pentru aceasta, să aibă cu cine să discute nedumeririle sale, să fie îndrumat cum să se orienteze în bibliografia problemelor ce-l preocupă. Cercetarea îl transferă pe student din zona liniștită și relativ rutinară a cursurilor și manualelor în aceea instabilă, controversată, în continuă devenire, a articolelor din revistele de specialitate. Pentru a favoriza acest transfer, e necesar ca studentul să nu fie considerat la bibliotecă un intrus, cum se mai întîmplă uneori. Mai este necesar ca studentul să găsească înțelegerea necesară la profesorii săi, aceștia să se aplece cu dragoste asupra manuscrisului conținînd încercările stîngace ale unui student care tatonează o idee, un rezultat nou. Un alt aspect: Olimpiadele școlare de matematică și concursurile studențești „Traian Lalescu" au fără îndoială valoarea lor stimulativă, dar mă întreb dacă o energie cel puțin comparabilă n-ar putea fi orientată spre dezvoltarea activității de cercetare.

Nu există un prim moment al cercetării. Spiritul de cercetare se formează tot timpul. Probleme care să reclame inițiativă, imaginație, dibăcie se pot formula în orice moment al dezvoltării intelectuale și al educației științifice. Dacă la vîrsta fragedă componenta ludică este preponderentă, mai tîrziu este necesar să dăm prioritate componentei cognitive. Ar trebui însă să ne îngrijoreze faptul că mulți copii care ne asaltează cu întrebări dintre cele mai năzdrăvane pînă la vîrsta de 7 ani își cenzurează curiozitatea pe măsură ce se obișnuiesc cu școala. Nu cumva prestigiul celui de la catedră ține loc de explicații și argumente? Se poate pune întrebarea de la ce vîrstă tînărul poate finaliza cercetarea cu o lucrare publicabilă într-o revistă de cercetare. Și aici e greu de fixat o limită. De multe ori, studenții noștri din primul an au elaborat lucrări publicate în „Studii și cercetări matematice", „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées" sau în periodice străine. Cercetarea rezultă dintr-o anumită mentalitate, de care se impregnează expunerea-dialog de la curs și activitatea de la seminar.

Cercetarea interdisciplinară corespunde unui stadiu nou, în care cunoașterea nu mai este segmentată pe domenii, ci după problemele pe care trebuie să le rezolvăm, de exemplu problemele globale ale omenirii — ca energia, mediul ambiant, educația, limbajul — ; ele sînt toate interdisciplinare. Un matematician cu vocație interdisciplinară nu se mulțumește să

aplice matematica la aceste probleme, ci are ambiția ca, pornind de la ele, să descopere o joncțiune necesară cu matematica. Pentru că va mai trece probabil un timp pînă cînd noua mentalitate va fi dominantă în învățămînt, în programe și manuale, să căutăm să venim în întîmpinarea ei prin crearea unor relații mai strînse între studenți din facultăți diferite, așa cum preconiza Gr. Moisil.

MATEMATICA ȘI REVOLUȚIA ȘTIINȚIFICO-TEHNICĂ

Există două direcții mari de desfășurare a revoluției științifice și tehnice: una privește aspectele energetice și, aș spune, substanțialiste sau materiale, iar alta privește aspectele informaționale, le-aș numi structurale. Nu știu dacă s-a adîncit suficient existența acestor două direcții și corelația dintre ele. De pildă, am impresia că fenomenele interdisciplinare sînt mai puternice la cea de-a doua direcție decît la prima. M-a interesat foarte mult să urmăresc modul în care studiul aspectelor energetice și substanțialiste conduce, la un moment dat, la probleme cu caracter informațional, la prelucrarea de date, la investigarea unor aspecte combinatorice și de strategie.

De obicei accentul cade pe prima direcție. Nu cred că se poate stabili o ierarhie. Ambele sînt la fel de importante. Revoluția științifică și tehnică se desfășoară pe toate planurile și din toate punctele de vedere. Nu putem spune că are loc în special în practică și mai puțin în teorie sau în special în științele naturii și mai puțin în științele sociale. Și am impresia că matematica poate să aducă aici anumite lămuriri. *Matematica nu este nici știință a naturii și nici știință socială, dar ea este plină de învățăminte în ceea ce privește metodologia științifică în genere.*

Matematica modernă este legată în special de studiul aspectelor informaționale. Unii consideră că matematica este un capitol al teoriei informației, al unei teorii a informației văzute într-un sens larg, nu doar ca un capitol de teoria probabilităților. Dar se întîmplă următorul fenomen: noi eram obișnuiți să numim matematica, într-un mod, desigur, metaforic, „industria grea a științei". Cu alte cuvinte, matematica nu se aplică direct în practică, matematica privește trepte mai înalte de abstractizare, iar funcția ei aplicativă se exercită prin intermediul unor grade mai coborîte

de abstractizare. Un exemplu clasic în această privință se referă la aplicarea matematicii în mecanică; din mecanica teoretică se trece într-o mecanică mai inginerească, apoi în tehnică și așa mai departe.

Dar matematica modernă a adus pe primul plan un fenomen surprinzător. În special matematica discretă, structuri cu caracter algebric dintre cele mai evoluate care invadează astăzi științele sociale, se aplică de multe ori nemijlocit în practică. Asistăm la transferuri *nemijlocite* ale celor mai abstracte structuri matematice în cele mai concrete, în cele mai practice, în cele mai arzătoare probleme de economie, de sociologie, de lingvistică, de istorie, de arheologie și așa mai departe.

De exemplu, teoria jocurilor se aplică cu atîta brutalitate în problemele de istorie încît nemijlocit se nasc din studiul istoriei probleme matematice pe care teoria jocurilor încă nu le-a luat în considerație într-un mod mai profund, nu le-a dezvoltat. Astfel, teoria jocurilor fără sumă nulă, care din punct de vedere pur speculativ este foarte puțin cunoscută, este cerută imperios de investigarea unor probleme de istorie (a se vedea, de exemplu, cercetările prof. univ. Mircea Malița); aplicarea teoriei grafurilor în teoria clasificării, în arheologie și în studiul vechilor manuscrise conduce imediat la probleme pur matematice, care sînt foarte puțin cunoscute, cum ar fi, de pildă, studiul arborescențelor în teoria grafurilor, studiu căruia într-o carte ca aceeaa lui Claude Berge i se acordă doar cîteva pagini. Se mai pot da multe exemple de acest fel.

La rîndul lor, disciplinele umaniste și sociale dau matematicienilor sugestii prețioase pentru dezvoltarea teoriilor matematice, de parcă ar simți nevoia să răsplătească ajutorul primit din partea lor. Așa cum altădată dezvoltarea mecanicii sugera analizei matematice principalele ei noțiuni, ca acelea de derivată și de integrală; așa cum în secolul nostru unele probleme inginerești au putut sugera clădirea unei noi teorii matematice, teoria distribuțiilor, astăzi este rîndul științelor umaniste și sociale să sugereze matematicii noțiuni și probleme noi. Dar nu numai că le sugerează, ci reclamă cu insistență dezvoltarea și rezolvarea lor. *Nu este deci suficient să cerem economiștilor, istoricilor și lingviștilor să învețe matematică; este necesar ca și matematicienii care au în vedere aplicații în științele umaniste și sociale să învețe cîte ceva din acestea, pentru a veni în întîmpinarea colegilor lor nematematicieni.*

Am impresia că se estompează deosebirile dintre teorie şi practică; contactul lor devine atît de direct, încît trebuie să ne revizuim unele prejudecăţi în această privinţă. Dar, pe de altă parte, se întîmplă un fenomen pe care l-am putea considera, eventual, opus acestuia, deşi este numai în aparenţă opus: anume, modul în care matematica se aplică astăzi arată că oamenii de ştiinţă au nevoie din ce în ce mai mult de foarte multă viclenie; trebuie să învăţăm să păcălim natura, să dăm dovadă de foarte multă şiretenie, să învăţăm să abordăm problemele pe căi foarte indirecte.

De pildă, toate activităţile creierului uman noi le studiem acum pe căi indirecte. Este acea metaforă a cutiei negre pe care a creat-o cibernetica şi care este un simbol al modului în care ştiinţa procedează de cele mai multe ori în momentul de faţă. Construim modele matematice, imaginăm diverse tipuri de maşini, de automate, care simulează diferite activităţi ale creierului, diverse procese informaţionale de prelucrare a informaţiei, apare o viziune operaţională, funcţională. Se observă aici că matematica are un rol metodologic important în ştiinţă, pentru că ne învaţă cum să ne punem întrebările, cum să desfacem o problemă mai grea într-o succesiune de probleme mai simple. Nu încercăm să definim elementele în sine, ci să le definim în mod operaţional, prin modul în care se operează cu ele, prin poziţia pe care ele o ocupă într-un anumit dispozitiv care are un anumit mod de funcţionare.

Cred că metodele care se aplică în ştiinţele sociale au tocmai această natură. Aici am impresia că apar neînţelegerile care au dat naştere la unele polemici. Se insistă foarte mult asupra diferenţei de natură a fenomenelor sociale faţă de fenomenele naturale şi, pe acest temei, se afirmă caracterul limitat pe care l-ar avea metodele matematice în ştiinţele sociale faţă de cele ale naturii. Însă cele mai fecunde rezultate se obţin, în ultima vreme, nu prin căutarea specificului fenomenelor studiate, ci tocmai prin căutarea modurilor în care fenomenele studiate intră în analogii cu alte fenomene, de cu totul altă natură. Aceasta nu înseamnă că, în ultimă instanţă, nu ne interesează şi specificul, dar specificul se cristalizează indirect, ca limită a unor cercetări care-şi propun scopuri din ce în ce mai îndrăzneţe.

Mai există însă şi un alt aspect. Problema dacă ştiinţele sociale manifestă o rămînere în urmă faţă de ştiinţele naturii se poate înţelege în două moduri. Se poate înţelege în sensul că fenomenele sociale, fiind prin natura lor mai complexe, este inevitabil ca ştiinţele sociale să fie mai puţin dezvoltate

decît științele naturii; ar fi deci vorba despre ceva care ține de natura acestor științe. Se poate însă interpreta această „rămînere în urmă" și ca o problemă de conjunctură, deci nu ca ceva care ține de natura științelor sociale, ci ca o situație care, eventual, ar putea fi lichidată printr-o mai bună organizare a cercetărilor, prin anumite succese dobîndite în științele sociale.

Am observat că argumentele aduse de obicei pentru teza rămînerii în urmă a științelor sociale privesc prima interpretare a problemei și se sprijină exclusiv pe ideea complexității mai mari a fenomenelor sociale față de fenomenele naturii. Nu s-a adus nici un argument care să susțină că această chestiune ar fi numai o chestiune de conjunctură, de moment de dezvoltare.

Am urmărit o serie de congrese ale științelor sociale: de istorie (la Moscova), de sociologie (în Bulgaria) ș.a. Am urmărit relatările despre aceste congrese; elementul cel mai revelator a fost tocmai cel al aplicării metodelor matematice în științele sociale. Mi se pare că atunci cînd discutăm direcțiile de desfășurare a revoluției științifice și tehnice nu este util să ne întrebăm dacă unele sînt rămase mai în urmă și altele sînt mai înaintate, pentru că legătura este atît de strînsă încît devine imposibil să putem discuta în acest fel. Se estompează tocmai diferențele dintre teorie și practică din punctul de vedere al metodologiei, se estompează diferențele dintre științele sociale și cele ale naturii, există o circulație necontenită între diversele niveluri de abstractizare, de generalitate. De aceea, *revoluția științifică și tehnică trebuie privită global, pe ansamblul cercetării, iar eventualele secționări ale ei să fie operate numai în măsura în care acest lucru este cerut de metodologia adoptată* (așa cum am procedat atunci cînd am abordat distincția dintre aspectele energetice și cele informaționale).

Ar fi, cred, foarte bine ca atunci cînd studiem științele sociale să renunțăm la acea prejudecată, aș numi-o eu, la acea obișnuință, de a căuta de fiecare dată să fixăm limite imanente metodelor care abia sînt inaugurate. Este, cred, mult mai sănătos ca aceste limite să apară *a posteriori*, în însuși procesul de cercetare. Tendința de fixare a unor limite apriorice este de natură să pună un anumit frîu procesului de creație științifică, să limiteze, să împiedice fantezia creatoare a se desfășura în mod liber.

Vremea noastră e bogată în transformări spectaculoase, care se răsfrîng rapid în domeniul culturii. Riscul de a deveni prizonier al unor idei perimate e mai mare ca altădată; pentru a nu-i cădea victimă, este nevoie de o mare deschidere de spirit, de multă disponibilitate intelectuală, de o pronunțată capacitate de adaptare la situații noi, de o adevărată vocație de a te angaja în dialog cu cei din afara specialității tale. Ca matematician, trăiesc foarte intens acest proces. Am deseori prilejul să cunosc intelectuali aparținînd unor profesii aparent depărtate de a mea: sociologi, psihologi, filologi, muzicologi, literați, oameni de teatru, artiști plastici care află sau, uneori, descoperă ei înșiși că domeniul lor de activitate poate beneficia de gîndirea și de tehnica matematică modernă. Această situație îmi dă un sentiment de mîndrie pentru profesia pe care mi-am ales-o, dar în același timp îmi atrage atenția asupra responsabilității sociale a matematicienilor. Nu vreau să discut acum raporturile deosebit de complexe care se stabilesc între matematică și celelalte discipline. Vreau doar să observ că astfel de interferențe ale unor domenii dintre cele mai variate modifică esențial conținutul culturii generale. Într-adevăr, nenumărate noțiuni, idei și rezultate care, pînă nu de mult, prezentau doar un interes de strictă specialitate au astăzi implicații în numeroase domenii și interesează un public foarte larg. În același timp, o serie de fapte care, pînă mai ieri, erau pe primul plan al dezvoltării științei, au fost ulterior împinse pe planul al doilea și nu-și mai justifică prezența în acel bagaj minim de cunoștințe și aptitudini care se cer unui om modern, independent de specialitatea sa.

Situația menționată reclamă o comunicare cît mai intensă între reprezentanții diferitelor activități creatoare — științifice sau artistice — o cît mai mare grijă a fiecărui specialist de a descoperi eventuale puncte de contact ale domeniului său cu alte domenii, chiar dacă aceste puncte de contact nu constituie preocuparea sa primordială. Învățămîntul trebuie să se adapteze și el la această situație și trebuie să recunoaștem că, în această direcție, chiar pe plan mondial, s-a realizat, deocamdată, destul de puțin.

Uneori, despre ireductibilitatea opoziției dintre spiritul logico-matematic și cel al disciplinelor umaniste se vorbește într-un mod indirect și eufemistic, de exemplu sub forma opoziției dintre spiritul geometric și spiritul de finețe, fiind evocat în această privință numele lui Blaise Pascal. În forma

sa brută, spiritul de finețe se poate manifesta printr-o gîndire intuitivă ezitantă, în zona considerată de obicei a inefabilului. Chiar și în această formă, spiritul de finețe poate fi modelat logico-matematic și un studiu al lui J. A. Goguen, intitulat „Logica ideilor confuze", publicat în 1969 în revista „Synthese", este semnificativ în această privință. Însă în forma sa mai avansată spiritul de finețe este cu totul altceva; este capacitatea gîndirii umane de a introduce, în interiorul fiecărei entități, noi și noi criterii distinctive, care dau naștere la tot atîtea noi nuanțe. Este o naivitate să se creadă că gîndirea logico-matematică s-ar putea dispensa de etapa intuitivă „fină" sau că finețea gîndirii artistice ar putea-o feri pe aceasta de rigorile care reglementează logica internă a expresiei artistice. Orice proces de creație — fie ea științifică sau artistică — angajează deopotrivă logică și intuiție, rigoare și finețe.

Uneori, se mai fac auzite opinii care întrețin o adversitate artificială între om și una dintre creațiile sale majore, mașina electronică de calcul. Se poate înțelege că un poet are tendința de a exagera latura inefabilă a poeziei; dar a încerca să anulezi, printr-o singură frază, efortul milenar de aproximare a poeziei prin structuri explicabile (așa cum o distinsă poetă a făcut-o în „Contemporanul") mi se pare cam mult. Nu se poate ascunde că noua metodologie științifică, legată de folosirea calculatoarelor electronice, obține, pe lîngă multe succese, și unele eșecuri. Dar a absolutiza o nereușită și a închide ochii în fața unui mare număr de reușite, pentru a conchide că investigația se va întoarce la vechile unelte, mi se pare de neînțeles. Procesul de structuralizare a științelor și artelor este o realitate fundamentală a ultimelor decenii; cum se întîmplă cu orice lucru autentic, n-au lipsit diletanții și snobii care să-l caricaturizeze.

Sînt prea multe probleme autentice, dificultățile reale care trebuie depășite în procesul de construire a unui nou concept de om cult, a unui nou tip de umanism, pentru a ne putea permite luxul de a ne întrebuința în rezolvarea unor false probleme și de a ne lupta cu dificultăți inexistente, cu primejdii imaginare.

EXAMENE ÎN SESIUNE ȘI EXAMENE LA DISTANȚĂ

Nu este vorba de distanța în spațiu, ci de distanța în timp. Examenele din sesiune, cele cu bilete și cu catalog, cu emoții, cu note și (din păcate) cu nopți nedormite, se referă

la lucruri foarte proaspete în memoria elevului sau studentului și este necesar, uneori, un efort destul de mare din partea examinatorului pentru a putea discerne ceea ce a fost efectiv asimilat. Există însă și un alt examen, care trece de obicei neobservat, un examen fără bilete și fără catalog, fără emoții și fără note, un examen care se desfășoară în mod continuu și la care tînărul trebuie să dea socoteală cum a asimilat lucrurile predate nu cu două-trei luni în urmă, ci cu doi-trei ani în urmă. Acest examen se desfășoară în însuși procesul de predare-seminarizare și studiu individual, proces în care tînărul este solicitat de nenumărate ori să utilizeze noțiuni, fapte și metode învățate poate cu mulți ani în urmă și care nu mai sînt proaspete în memoria sa. De cele mai multe ori, aceste noțiuni, fapte și metode sînt solicitate elevului sau studentului într-un alt context, într-o altă nuanță, într-o altă ipostază decît cele în care el le-a cunoscut prima oară. În aceste condiții, studentul este pus în situația de a nu putea valorifica decît acele cunoștințe care, însușite într-un trecut mai mult sau mai puțin depărtat, s-au convertit în deprinderi esențiale ale gîndirii sale. Tot ceea ce a fost doar memorat, fără a fi efectiv asimilat, se dovedește acum a fi un rebut. Acest examen la distanță, la care tînărul este deopotrivă examinator și examinat, este examenul necruțător al timpului, la care nu se mai poate trișa. Abia la acest „examen secund" studentul are prilejul să constate ce înseamnă un examen în sesiune trecut doar cu nota 6 sau 7.

Cursul pe care-l predau la anul al III-lea evocă necontenit noțiuni, fapte și metode de la cursurile din anii precedenți. Solicit uneori sala să recunoască, într-o teoremă sau o noțiune, un fapt întîlnit în urmă cu doi ani la cursul de Analiză. Multe priviri se îndreaptă atunci în jos. Examenul la distanță a avut loc. Din păcate, pentru mulți studenți acest examen se soldează cu un eșec.

A te pregăti lună de lună, săptămînă de săptămînă, zi de zi, a demonstra astfel, la examenele din sesiune, o pregătire profundă, care să se soldeze nu numai cu promovarea lor, dar și cu promovarea examenului continuu la care te supune activitatea studențească ulterioară, apoi exercitarea profesiunii și însăși viața, iată deziderатul fundamental pe care n-ar trebui să-l uite nici un student în acele zile febrile de verificare a cunoștințelor.

O analiză mai atentă a contactelor pe care matematicienii le stabilesc cu ceilalți specialiști dezvăluie unele fapte deosebit de semnificative pentru raporturile existente în momentul de față între matematică și celelalte științe. Discutînd cu mai mulți colegi de la Centrul de Statistică Matematică am aflat despre existența unui număr destul de mare de colaborări pe care acest centru le-a stabilit cu diferite instituții și întreprinderi în probleme privind întreaga economie (de exemplu, cu Institutul de Studii și Proiectări Energetice, în ceea ce privește rețeaua energetică a țării) și, mai ales, în probleme care apar la nivelul întreprinderilor (de exemplu, în probleme de siguranță, în funcționare, de stabilire a vieții medii a diferitelor agregate, de organizare a rezervelor, de control statistic al calității produselor, probleme de încărcare optimă a utilajelor etc.). Aceste colaborări sînt fie rezultatul acțiunii de organizare științifică a producției, fie rezultatul solicitărilor venite din partea întreprinderilor; dar, pentru ca acest fapt să nu apară în contradicție cu unele situații care vor fi semnalate mai jos, precizăm, de la început, că solicitările în cauză au fost, de cele mai multe ori, precedate de o activitate consecventă de influențare pe care matematicienii au desfășurat-o în numeroase întreprinderi, prin contacte și discuții lămuritoare cu conducerile acestora. Se poate deci spune că de multe ori inițiativa a aparținut matematicienilor, deoarece ei au fost aceia care au creat climatul favorabil unei cooperări între ingineri și matematicieni. Au existat cazuri, din fericire destul de rare, în care unele fabrici au respins, chiar din faza inițială, propunerile de colaborare venite din partea matematicienilor. În general însă, instituțiile și întreprinderile au primit cu interes ideea unei colaborări de acest fel. La Institutul de Studii și Proiectări Energetice, de exemplu, există colective puternice de matematicieni și ingineri care studiază probleme privind calculatoarele electronice, statistica matematică, programarea matematică, tratarea automată a informațiilor, toate în legătură cu rețeaua energetică națională. Este și aceasta un „semn al vremurilor noi", deoarece nu mai departe decît cîțiva ani în urmă, chiar în unele institute de cercetări existau ingineri și tehnicieni care priveau metodele noi, matematice, ca ținînd de domeniul unor idei mai mult fantastice decît științifice. Un alt exemplu, citat de către un șef de secție de la Centrul de Statistică Matematică se referă la un inginer de la Institutul de Cercetări

în Foraj și Extracție din Cîmpina, inginer care, avînd o pregătire matematică mai ridicată și militînd pentru organizarea unei instruiri matematice a inginerilor și tehnicienilor din institut, era considerat de mulți colegi drept o ființă cel puțin stranie. Astfel de situații devin din ce în ce mai rare, totuși nu trebuie să ne grăbim să tragem concluzii foarte optimiste.

Metodele matematice sînt prezentate mereu ca un semn al noului și nimeni nu dorește — dacă nu urmărește să devină excentric cu orice preț — să fie considerat un 'om vechi'. Dar de la această recunoaștere exterioară, de prestigiu, pînă la recunoașterea ce exprimă o convingere lăuntrică mai este o cale.

Un exemplu semnificativ îl constituie, în această privință, colaborarea care a funcționat mai mulți ani între Centrul de Statistică Matematică și Uzinele „Steagul Roșu" din Brașov. Stînd de vorbă cu o cercetătoare de la Centrul de Statistică Matematică am putut afla cum a decurs colaborarea acestui centru cu uzinele respective în ceea ce privește aplicarea metodelor de control statistic al calității produselor. La solicitarea matematicienilor, conducerea uzinei a furnizat toate datele necesare, pe baza cărora s-a elaborat un studiu privind determinarea duratei optime de reglaj (studiu publicat în „Revista de statistică", 1966). Pe baza acestui studiu, s-au putut înainta uzinei unele propuneri concrete de modificare a procesului de producție și a organizării producției, modificare ce ar permite înlocuirea duratei empirice de reglare a strungurilor prin durata care rezultă din studiu. Iată însă că aceste propuneri, care implicau în mod natural anumite 'incomodități' (modificarea tehnologiei producției, reorganizarea serviciului tehnologiei producției, a controlului etc.), nu au fost aplicate. Firește, poate că o astfel de atitudine a fost determinată de faptul că adaptarea la noile metode ar fi putut împiedica, pentru un anume timp, îndeplinirea planului! Poate problema reclama o analiză mai adîncă! Poate cîte ceva din fiecare, dar în cele din urmă s-a ajuns la neaplicarea propunerilor!

Iată și un alt exemplu. Mi s-a relatat despre colaborarea cu Combinatul de Industrializare a Lemnului din Pitești, în vederea unei mai bune programări a stației de mașini de calcul, în problema sortimentelor produse în cadrul combinatului, a încărcării mașinilor, precum și în ceea ce privește controlul statistic al calității. Și de data aceasta s-a elaborat un studiu complet, care a fost analizat și aprobat de către Ministerul Industriei Forestiere. Totuși, studiul nu s-a putut

aplica. Întreprinderea fiind relativ nouă, neavînd încă o aprovizionare ritmică, nedispunînd în măsură suficientă de piese de schimb și necunoscîndu-se cu exactitate și destulă amănunțime indicii specifici de funcționare, nu prezenta condițiile preliminare necesare unei analize matematice, pe baza cărora să se poată determina parametrii care făceau posibilă aplicarea rezultatelor din studiu. S-a confirmat încă o dată că aplicarea metodelor matematice cere un nivel ridicat de organizare a producției. Aplicarea metodelor matematice presupune o bună organizare (aprovizionare ritmică, cunoaștere a capacităților de producție etc.) și un sistem informațional cît mai complet și mai exact. Numai în aceste condiții se pot aplica metodele de programare matematică, pentru determinarea variantei de plan optime, numai atunci se poate trece la stabilirea programului optim de încărcare a mașinilor. Aici apare un alt avantaj al tendințelor de aplicare a metodelor matematice: ele constituie pentru întreprinderi un stimulent în vederea îmbunătățirii organizării procesului de producție.

Apropierea dintre matematicieni și ingineri nu este numai o chestiune de încredere, ci și una de înțelegere. De multe ori, matematicienii înțeleg greu problemele care li se pun de către alți specialiști, iar aceștia din urmă nu reușesc să dea problemelor lor o formulare matematică. Se depune, de ambele părți, un efort deosebit pentru găsirea unui limbaj comun, dar acest efort nu este totdeauna încununat de succes. Dar ceea ce-i desparte pe ingineri de matematicieni nu este numai limbajul, ci și un mod deosebit de a privi problemele. Inginerul este, de cele mai multe ori, cu gîndul la îndeplinirea planului (în mod justificat) și la urmărirea procesului de producție, el are tendința de a menține acest proces în formele deja existente. Aceasta, în timp ce matematicianul este animat de dorința de a verifica rezultatele calculului hîrtiei, de a confrunta aceste rezultate cu practica.

Nu vreau să fiu înțeles greșit; nu pretind că inginerul este, prin natura activității sale, un om mai puțin receptiv la nou, în raport cu matematicianul. Însă activitatea în cadrul unei întreprinderi este supusă necontenit unor cerințe dintre cele mai variate, unor condiționări imediate, care au tendința de a 'cumînți' unele încercări de derogare de la linia prestabilită, în timp ce, la nivelul de abstracție la care se lucrează în matematică, problemele capătă un caracter de generalizare mai mare. Lipsește aici o verigă intermediară, o categorie de specialiști care să facă legătura între inginerul de întreprindere și matematicianul de cercetare, lipsesc

specialiștii care să știe mai multă matematică decît un inginer obișnuit, dar să dispună de o mai mare capacitate de înțelegere a activității unei întreprinderi și de aplicare, la acest nivel, a matematicii, decît un matematician obișnuit. Sînt mai mulți ani de cînd se încearcă să se atenueze deosebirile dintre matematicieni și ingineri, prin cursuri de matematică predate inginerilor, dar nu se poate spune că aceste cursuri au dat totdeauna rezultatele dorite. Astfel, un număr de ingineri din industria chimică au urmat, timp de cîteva luni, cursuri de statistică matematică și de control statistic al calității. Fără îndoială, aceste cursuri nu au fost inutile, însă ele ar fi fost mult mai eficiente dacă ar fi fost aleși cursanți care manifestau interes pentru tematica cursurilor, dintre cei care se întîlniseră deja cu problemele în discuție și doreau să-și amelioreze pregătirea. Este evident însă că de cele mai multe ori un inginer care vine la asemenea cursuri nu după criteriul de mai sus, ci numai pentru că este trimis de forurile superioare, nu va da un randament satisfăcător. Fără îndoială, o mai bună organizare a cursurilor de matematică pentru ingineri, o selecționare mai judicioasă a cursanților vor fi de natură să contribuie esențial la apropierea dintre știință și producție.

O altă problemă, de mare însemnătate, este aceea a înzestrării industriei și institutelor departamentale cu calculatoare electronice moderne. Nu se pot face aplicații serioase și de anvergură fără calculatoare; dar numărul acestora este încă insuficient. În această ordine de idei, sînt deosebit de importante programele de dotare a economiei naționale cu mijloace moderne de calcul.

Problemele pe care le discutăm sînt pe primul plan al atenției în toate țările avansate. S-a creat o organizație europeană pentru controlul calității, „European Organisation for Quality Control", la care și țara noastră este membră. Această situație ne dă posibilitatea să fim, într-o mai mare măsură, la curent cu programele realizate în celelalte țări europene în problemele de siguranță a funcționării utilajelor și de control statistic al calității produselor, dar în același timp ne obligă și ne stimulează să obținem rezultate cît mai bune.

Procesul de matematizare a ştiinţei a fost discutat într-un mare număr de articole şi cărţi. Raportîndu-ne numai la perioada anilor 1950—1970, în ţara noastră s-au publicat peste 300 de articole pe această temă. În această ordine de idei, problemele sînt cam aceleaşi pretutindeni în lume. O foarte mare parte a acestor articole nu face decît să regăsească, eventual în nuanţe noi, consideraţii deja făcute în unele articole precedente. Există mai multe cauze ale acestei situaţii. Mai întîi, articolele de această natură apar în publicaţii dintre cele mai variate, ceea ce face foarte dificilă urmărirea lor. Autorii unor astfel de articole nu cunosc decît o foarte mică parte din articolele pe teme similare, publicate anterior. Nici o revistă de referate nu centralizează semnalarea şi recenzarea acestor articole. De exemplu, revistele de referate din domeniul lingvisticii semnalează numai articolele care privesc aplicarea matematicii în lingvistică şi aceasta numai în măsura în care aceste articole apar în publicaţii care intră, de obicei, în raza de observaţie a revistelor respective. Deci, chiar unei reviste de referate din domeniul lingvisticii îi scapă o parte considerabilă din literatura consacrată procesului de matematizare a lingvisticii.

La aceste dificultăţi de natură obiectivă se adaugă şi faptul că majoritatea autorilor care abordează problemele generale ale procesului de matematizare ţin nu atît să întreprindă o cercetare a problemei, cît să împărtăşească o experienţă proprie. Chiar pe plan mondial, nu dispunem de un bilanţ — fie el cît de aproximativ — al literaturii privind procesul de matematizare. În acest domeniu nu există încă o cercetare propriu-zisă, există doar observaţii şi mărturii disparate — unele deosebit de pătrunzătoare.

Există trei categorii mai importante de persoane care scriu articole pe teme privind procesul de matematizare: matematicienii, filozofii şi specialiştii în domeniile care solicită metode matematice (am putea adăuga şi a patra categorie, aceea a ziariştilor, de care însă nu ne vom ocupa aici). Fiecare din aceste categorii prezintă un profil bine conturat al modului de abordare a problemei de care ne ocupăm. Matematicianul are tendinţa de a justifica adoptarea, în procesul de modelare a celor mai variate fenomene, a acelor tipuri de structuri care există deja în matematică şi în legătură cu care s-au obţinut numeroase rezultate. Această tendinţă e firească şi în bună măsură pozitivă, deoarece cu cît este mai dez-

voltată teoria în termenii căreia se elaborează modelul, cu atît vor fi mai bogate consecințele logice ale modelului adoptat, deci informația pe care el o furnizează va fi mai amplă. Astfel, cînd pentru un fenomen economic sau sociologic adoptăm un model elaborat în termenii teoriei grafurilor, acest model va profita de întreaga bogăție de noțiuni și rezultate existente în teoria grafurilor.

Totuși, tendința amintită nu este lipsită de riscuri, deoarece poate duce — și efectiv aceasta se întîmplă uneori — la încercări de a potrivi fenomenul studiat într-un „pat al lui Procust", de a-i ignora trăsăturile, în măsura în care ele nu pot fi descrise cu ajutorul structurilor matematice cunoscute. Matematicianul urmărește dialectica internă a procesului de modelare matematică, menținîndu-se necontenit în imediata apropiere a acestui proces, urmărindu-i cutele cele mai fine. Filozoful este, în schimb, tentat să se desprindă cît mai repede de aspectele tehnice ale procesului de matematizare, pentru ca, degajînd cîteva trăsături generale ale acestui proces, să caute a le raporta la unele categorii generale ale filozofiei, la unele curente, concepții și metodologii cu un statut recunoscut în domeniul gîndirii filozofice. În ceea ce-i privește pe specialiștii nematematicieni, ei manifestă tendința unei modelări cît mai cuprinzătoare și mai complexe, care aspiră la exhaustivitate, aspirație care, evident, nu poate fi realizată, deoarece modelul, prin însăși natura sa, constituie doar o aproximație a obiectului. Matematica este, într-adevăr, domeniul privilegiat al exactității, dar ne permitem să adăugăm că substantivul pe lîngă adjectivul *exactă* este așezat în modul cel mai firesc, în ceea ce privește modelarea matematică, este acela de aproximație. Modelarea matematică este domeniul aproximațiilor exacte; aproximații, pentru că modelele reține doar *unele* aspecte ale fenomenelor modelate; exacte, pentru că aceste modele sînt construcții matematice. În același timp, nematematicianul este tentat să identifice, în fenomenul modelat, structuri cît mai originale, pe care cu greu acceptă să le recunoască izomorfe cu structuri matematice deja apărute în studiul altor fenomene, aidoma acelor clienți exigenți, care preferă un costum de comandă unuia gata confecționat. Specialistul nematematician are tendința de a accentua caracterul singular, de unicat, al fenomenului pe care-l studiază, în timp ce matematicianul are tendința de a insera fenomenele în clase de fenomene izomorfe; meseria matematicianului este, după cum spune Banach, aceea de a stabili analogii.

Fără îndoială că absolutizarea oricăreia dintre tendințele de mai sus este dăunătoare. Marea varietate de structuri existente în matematica modernă răspunde, în bună măsură, la necesitățile activității de modelare a lumii reale, dar există numeroase fenomene a căror modelare reclamă introducerea unor structuri matematice noi sau, cel puțin, a unor noțiuni și problematici inedite, în cadrul unor teorii matematice deja existente. Economia matematică a îmbogățit problematica teoriei grafurilor iar lingvistica matematică și teoria automatelor au determinat o problematică nouă în algebră, în special în teoria semigrupurilor libere.

Filozofii și, în general, specialiștii nematematicieni sînt foarte preocupați de problema limitelor procesului de modelare matematică. Venind parcă în replică la îngrijorarea acestora, matematicienii obișnuiesc să amintească, uneori, cu oarecare înfumurare, pe acei oameni mari care au afirmat că o disciplină este științifică în măsura în care ea se matematizează. Aici, pozițiile sînt încă foarte depărtate. Orice știință este permanent alimentată cu fapte ale lumii intuitive, care formează materia ei primă, izvorul ei de prospețime și viață; tocmai acest flux permanent dinspre lumea reală spre lumea constructelor științifice explică imposibilitatea formalizării integrale a unei științe. Însă unii gînditori denaturează semnificația acestei situații, căutînd să deducă de aici existența unor limite imanente, apriorice, ale procesului de matematizare, existența unor aspecte care nu vor putea fi niciodată matematizate, uitînd că matematica însăși este în continuă evoluție, absolutizînd deci unele limite care țin de stadiul de dezvoltare, la un anumit moment, al științei. Caracterul inepuizabil al modelării matematice constă tocmai în faptul că orice limită atinsă în modelare este susceptibilă să fie depășită; despre nici un aspect al unui fenomen nu se poate afirma că el nu va intra niciodată în raza modelării matematice; aceasta este viziunea dinamică și dialectică a evoluției științei, inclusiv a matematicii. În principiu, putem admite că fiecare aspect va fi formalizat, dar nu va exista un moment la care întreaga știință să fie formalizată.

Matematizarea este un indiciu al măsurii în care o știință și-a degajat aspectele structurale, formale, funcționale, dar eficacitatea unei științe se apreciază nu numai după aceasta, ci și după gradul ei de adecvare la fenomenele studiate, adecvare pe care matematica o realizează de obicei prin intermediul altor științe. Nu se poate vorbi deci de o ierarhie de importanță a științelor, care ar avea în vîrf matematica; științele sînt

necomparabile ca importanță, fiecare se află față de celelalte și deasupra și dedesubt.

Acum treizeci și cinci de ani existau aplicații ale matematicii în lingvistică, dar nu exista încă lingvistica matematică; aceasta din urmă s-a născut abia în urmă cu vreo treizeci de ani, ea însemnînd o stare de spirit nouă, care nu se obține deci prin simpla alăturare a viziunii matematice și a viziunii lingvistice. Astăzi însă nu mai este vorba de simple domenii interdisciplinare bilaterale, ci de interferențe de complexitate multiplă, în cadrul cărora viziunea matematică funcționează adeseori ca un catalizator. Nu este locul aici să discutăm în ce fel, de exemplu, domenii ca psihologia, genetica, poetica, studiul afaziei, teoria automatelor, teoria informației, teoria gramaticilor, termodinamica, logica matematică și pedagogia au interferat, dînd naștere unui domeniu *sui generis*, căruia nu i s-a găsit încă nici măcar un nume provizoriu — și a cărui armătură este matematica. Pentru că, de exemplu, izomorfismul atît de interesant astăzi între genetică și lingvistică, nu a putut fi identificat decît prin intermediul matematicii. Este aici o priveliște măreață, dar și înfricoșătoare; poate că o perioadă de semidiletantism necesar, inevitabil, ni se întinde în față, deoarece pe harta cunoașterii apar țări noi, neexplorate, pe care trebuie totuși să încercăm să le cucerim, iar învățămîntul interdisciplinar, de natură să formeze pe locuitorii îndreptățiți ai acestor ținuturi, se dezvoltă cu încetineală de melc. Ce teren prielnic pentru apariția adevăraților diletanți și chiar a diletanților-escroci.

Comoditatea cu care unii matematicieni refuză să înțeleagă că ar putea fi mai folositori altor specialiști dacă ar învăța ceva — cît de puțin — din meseria acestora, dacă ar încerca să înțeleagă măcar o parte din felul lor de a vedea; ignoranța unora dintre ei în ceea ce privește problematica generală a structuralismului, care reprezintă, pentru un mare număr de discipline, anticamera matematizării lor, dar care s-a dezvoltat, de multe ori, din surse foarte depărtate de o adevărată viziune matematică (a se vedea, de exemplu, antropologia structurală a lui Claude Lévi-Strauss); ignorarea faptului că matematica tinde și ea să solicite alte discipline și nu numai să fie solicitată de acestea (și poate că nu e departe ziua în care un cercetător al limbajelor de programare va avea nevoie de cunoștințe complexe de lingvistică structurală); snobismul uneori, candoarea altădată, cu care atîți nematematicieni se prevalează de eticheta unor teorii matematice moderne, în timp ce ei le ignorează fondul și nu folosesc decît cîteva biete cuvinte sau notații întîlnite în primele zece pagini ale unei

cărți de matematică — și aceea de popularizare — și uneori nici măcar atît ; persistența atîtor nematematicieni — inclusiv filozofi — într-un structuralism de tip eseistic, în care aluziile la matematizare sînt mult reduse și flancate de cît mai multe limite ; această ambiție de a salva aparențele, această goană fără nici o convingere personală după ceea ce pare a fi la modă, toate aceste fenomene supărătoare, dar amuzante nu vor putea, evident, împiedica dezvoltarea adevăratului proces de matematizare, care este în realitate mai lent și mai puțin spectaculos decît ar putea să pară la prima vedere.

TINERII ÎN ACTIVITATEA DE CERCETARE

Orice tînăr, fie el elev sau student, dorește să fie considerat nu numai ca membru al unei colectivități, dar și ca o personalitate distinctă. În acest fel, randamentul său crește în mod sensibil. Introducerea treptată a unei noi forme de promovare, care nu mai recurge la soluția comodă, dar de multe ori superficială a examenelor finale, ci se bazează pe activitatea pe care studentul o desfășoară în cursul întregului an, a dat multor tineri posibilitatea de a-și manifesta o personalitate care altfel ar fi trecut probabil neobservată. De o deosebită eficacitate s-a dovedit a fi această măsură la anul al cincilea, format exclusiv din studenți care au terminat primii patru ani cu medii peste nota 9. Studenți care în primii patru ani trecuseră neobservați s-au dovedit a fi capabili de inițiativă și pasiune în explorarea unor probleme delicate, atunci cînd au fost abordați în mod corespunzător, luîndu-se în considerare gusturile, preferințele și posibilitățile lor și dîndu-li-se ajutorul necesar în momentele de dezorientare. După experiența pe care am parcurs-o în această privință cu anii IV și V ai Facultății de Matematică a Universității din București, pot afirma că 90% dintre studenții care absolvă primii patru ani cu medii peste 9 sînt capabili, în anul V, de o activitate de cercetare care se soldează cu rezultate originale, demne de a fi publicate în revistele de specialitate.

S-a întîmplat însă și un alt fenomen. La unele cursuri la care promovarea ar fi trebuit să se facă pe baza activității din timpul anului, această activitate a fost insuficient de semnificativă și a fost nevoie să se recurgă tot la examene finale. Dar nu este oare examenul final un mijloc comod de a evita o îndrumare și un control continuu al studentului de-a lungul întregului an? În loc de a trata studentul ca pe o individualitate distinctă, dîndu-i să lucreze independent și controlîndu-l

în același timp, punîndu-l în situația de a face, față unui dialog critic cu colegii săi, preferăm uneori un control o dată pe an; în aceste condiții, sînt multe șanse ca studentul în cauză să fie diagnosticat inapt pentru cercetare. Mi s-a întîmplat ca studenți care, în decursul anului IV, îmi trecuseră neobservați să dea dovadă în anul V de aptitudini remarcabile pentru cercetare. Nu ei s-au schimbat, ci strategia mea față de dînșii. În anul IV nu găseam modul potrivit de a-i aborda, nu stătusem niciodată mai atent de vorbă cu ei și nici ei, din timiditate sau din insuficientă autocunoaștere, nu m-au solicitat. În anul V însă, am avut grijă de la început să propun cît mai multe chestiuni susceptibile de a fi tratate de studenți, am căutat să-i cunosc personal și rezultatele au fost incomparabil mai bune.

Mai există și un alt aspect al problemei. Activitatea de cercetare se dovedește a fi mijlocul cel mai durabil de însușire a științei. Cunoștințele de care ai avut nevoie pentru a rezolva o problemă se transformă repede în deprinderi (chiar dacă problema în cauză rămîne nerezolvată!). De aceea, aprecierea profesională o facem nu numai pe baza notelor, ci și ținînd seama de eventualele aptitudini pentru activitatea de cercetare.

Este destul de răspîndită opinia conform căreia activitatea de cercetare nu poate începe decît în momentul în care s-a asimilat o vastă cultură de specialitate. Unii plasează acest moment destul de tîrziu, în preajma înscrierii la doctorat; alții sînt mai generoși și-l coboară în a doua parte a studiilor universitare. Nu mă raliez la aceste puncte de vedere. Consider că la orice nivel de dezvoltare intelectuală a tînărului se pot propune probleme cu caracter inedit și este posibilă o activitate de cercetare. Tînărul trebuie să se obișnuiască de la bun început să învețe cercetînd și să cerceteze învățînd. Aceste două activități trebuie să tindă a fi concomitente, nu alternative. Numeroasele sesiuni științifice și reviste științifice ale liceelor confirmă acest punct de vedere. Nu este mai puțin adevărat că aceste sesiuni și reviste sînt foarte inegale și cuprind uneori compilații cărora nici măcar nu li se indică sursa.

Un mare număr de elevi inventivi și plini de inițiativă sînt dornici să plăsmuiască ceva care să fie produsul inteligenței și imaginației lor, dar au nevoie de o îndrumare adecvată. Pînă și premierea celor mai bune comunicări, în loc să se facă într-un cadru adecvat, sărbătoresc, în prezența unui cît mai mare număr de studenți, se desfășoară într-un cerc relativ restrîns, care-i micșorează considerabil semnificația.

Tînărul trebuie învățat că munca de cercetare comportă un anume risc, riscul de a merge pe o cale care nu dă rezultatele dorite sau riscul de a aborda o problemă al cărei grad de dificultate a fost subestimat. Dar, oricum ar fi, el se alege cu un cîștig. Chiar dacă nu obține nici un rezultat în problema pe care a avut-o în vedere, el se alege cu o experiență metodologică deosebit de utilă. Efortul de a trece dincolo de manualele și cursurile după care se pregătește pentru examene, la știința care se face sub ochii lui, în formele ei încă nedeplin cristalizate, așa cum se găsește în articole de revistă și preprinturi, este de o considerabilă valoare educativă. Abia cu acest prilej intră tînărul în laboratorul de creație științifică, abia acum poate observa ezitările și semnele de întrebare ale omului de știință, modul în care, prin căutări succesive, se ajunge la cunoașterea unui lucru nou. Cursurile și manualele dau într-o mai mică măsură imaginea științei în procesul ei de elaborare, deoarece ele sînt obsedate de nevoia de sistematizare a cunoștințelor, sistematizare care înlocuiește, de multe ori, ordinea naturală, euristică a ideilor cu o ordine fabricată, de obicei inversă celei genetice.

Orice discuție despre cercetarea științifică în școlile și institutele noastre de învățămînt trebuie să precizeze raporturile acesteia cu practica în producție a elevilor și studenților. Necesitatea ca învățămîntul, cercetarea și producția să alcătuiască un proces unitar în formarea viitorilor specialiști ne obligă să analizăm și unele aspecte mai complexe ale acestui proces. Desigur, manifestări de tipul Expozițiilor naționale de invenții și inovații ale elevilor sau studenților aduc într-o atît de organică legătură activitatea de cercetare cu aceea de aplicabilitate în producție, încît aici singura problemă care mai rămîne să fie discutată este aceea a valorificării efective a rezultatelor obținute (lucru care în parte a și fost făcut, prin încheierea unor contracte corespunzătoare).

Acum, cînd practica productivă devine o componentă din ce în ce mai importantă a activității tineretului nostru studios, este cazul să ne întrebăm dacă raporturile în care se află ea cu cercetarea științifică sînt totdeauna în concordanță cu colaborarea strînsă pe care o preconizăm între cercetare și producție. Există aici două aspecte: în ce fel cercetarea științifică își dezvoltă latura aplicativă și în ce fel practica productivă a elevilor și studenților nu se mulțumește să fie o simplă rutină, ci stimulează preocupări creatoare.

Se petrece totuși un fenomen surprinzător și, în același timp, îmbucurător. Elevii și studenții se arată mai deschiși

colaborării interdisciplinare decît profesorii lor, ei inițiază colaborări în multe domenii de pionierat. Mi-aduc aminte cu cît elan s-au adunat în aula Universității, în 1973, studenți din cele mai variate instituții de învățămînt superior, pentru a pune bazele unei colaborări interdisciplinare prilejuite de dezvoltarea informaticii. Studenții de la secția de informatică a Facultății de Matematică a Universității din București au întreprins interesante cercetări interdisciplinare în economie, biologie, arhitectură, studiul limbajelor de programare, folclor, muzicologie, teatru, poetică, multe dintre acestea profitînd de colaborarea cu specialiști nematematicieni.

Nu mai mic este interesul pentru preocupările interdisciplinare în rîndul elevilor. Am putut verifica direct acest lucru cu prilejul unor întîlniri mai vechi cu elevii liceului din comuna Drăgănești-Vlașca, județul Teleorman, și cu elevii Liceului „I. L. Caragiale" din București; dar simpla răsfoire a revistelor culturale ale diverselor licee din țară arată că este vorba de un fenomen general. Totuși, trebuie să observăm și aici că multe cercetări interdisciplinare rămîn nefinalizate, există încă o anumită ezitare în încheierea unor contracte de colaborare care reclamă un plus de răspundere din partea celor care sînt angajați într-o colaborare. Un bun exemplu în ceea ce privește dezvoltarea cercetărilor aplicative și a finalizării acestora prin contracte îl dau catedra de mecanică și Centrul de calcul al Universității din București; în cadrul acestor contracte o anumită pondere o au studenții.

SĂ NE ANTRENĂM CU PROBLEME NECONVENȚIONALE

Pentru a-ți testa forța și a stabili stadiul în care te afli în înțelegerea noțiunilor și teoremelor, este necesar să te antrenezi cu probleme inedite, deci care să reclame măcar un minimum de inițiativă. Gradul de dificultate al acestor probleme poate fi foarte diferit; esențial este ca ele să te oblige la o căutare. Am propus un astfel de test unor studenți din primul an, la numai o lună după începerea cursurilor. Se poate deci spune că rezultatul este, în bună măsură, semnificativ pentru formația pe care studenții au primit-o în școală.

Testul a fost propus pentru 20 de minute și a constat într-o singură întrebare: *Este adevărat că orice șir de numere reale admite un subșir monoton?* Nu am întîlnit, în cărțile curente de matematică, răspunsul afirmativ la această întrebare. Formularea chestiunii sub formă interogativă, ca mai sus, este incomparabil mai stimulativă decît formularea ei

imperativă: *Să se arate că orice șir de numere reale conține un subșir monoton.* Prima variantă provoacă un proces de căutare și de imaginație, cea de a doua pune accentul pe actul de verificare. Este adevărat că nu au fost mulți cei care au dat răspunsul negativ la întrebarea noastră; dar chiar cei care au dat răspunsul corect au fost orientați spre o altă strategie decît aceea pe care ar fi adoptat-o în varianta formulării imperative. Modul interogativ testează și intuiția, nu numai logica. Intuiția o ia înaintea demonstrației, anticipînd uneori răspunsul corect.

Cîteva aspecte esențiale s-au desprins din acest test, pe care le vom discuta în cele ce urmează: a) Consecințele de amploare pe care le pot avea conotațiile terminologiei folosite; b) complicarea inutilă a demersului; c) tendința de folosire exagerată a simbolisticii, în dauna limbii naturale; d) tendința de situare în afara chestiunii care se cere discutată.

DENOTAȚIE ȘI CONOTAȚIE ÎN FOLOSIREA CUVINTELOR

Să explicăm mai întîi ce sînt conotațiile unui termen. În limbă, în general, în limbajul matematic în special, fiecare termen este folosit în conformitate cu definiția sa. În folosirea cuvîntului *scaun*, toți avem în vedere același lucru: „mobilă de lemn, de metal etc., cu sau fără spetează, pe care poate ședea o singură persoană". Am reprodus definiția dată acestui termen în „Dicționarul explicativ al limbii române". Un dicționar consemnează o convenție socială la care aderă tacit toți cei care vorbesc o anumită limbă. Sensul consemnat în dicționar constituie *denotația* cuvîntului. Denotația exprimă sensul fundamental, de bază al unui cuvînt. Însă multe utilizări ale unui cuvînt se depărtează de denotație. Ele constituie *conotația* cuvîntului. De exemplu, în expresii ca „Se teme că-și pierde scaunul" sau „om cu scaun la cap" cuvîntul *scaun* nu mai este folosit conform denotației sale, ci la modul conotativ. Uneori, chiar în folosiri conotative ca cele din exemplele menționate, funcționează tot o convenție socială. Expresii ca „om cu scaun la cap" sînt numite *expresii idiomatice*; ele se caracterizează prin faptul că trebuie luate ca un tot, sensul total nefiind simpla compunere a sensurilor termenilor, ci un sens nou, care se află numai într-o legătură parțială și indirectă cu sensul denotativ. Există însă și conotații care nu intră în nici o convenție prealabilă. Așa sînt conotațiile poetice. Cînd poetul-matematician Ion Barbu-Dan

Barbilian scrie „Din ceas, dedus adîncul acestei calme creste", folosirea lui *ceas* constituie o conotație neconvențională, ceasul este aici cu sensul de *timp*; între *ceas* și *timp* există o relație de contiguitate de o oarecare ambiguitate (ceasul este o anumită fracțiune de timp, dar totodată și un instrument de măsură a timpului). O conotație de acest fel se numește *metonimie*. Conotația folosită de Ion Barbu nu mai are un caracter convențional, ci creator, individual și contextual (în sensul că trebuie considerată în contextul poeziei lui Ion Barbu). Deosebim deci două feluri de conotații: convenționale (de rutină) și inedite (creatoare).

Conotațiile convenționale sînt și ele, în mare măsură, consemnate în dicționare, însă ca sensuri secundare. Conotațiile individuale, creatoare, se pot transforma, prin reluare și răspîndire, în conotații sociale, convenționale; există ipoteza după care toate conotațiile sociale ar proveni din conotații individuale.

CONOTAȚII ÎN LIMBAJUL MATEMATIC

Să ne întoarcem acum la matematică. S-a crezut multă vreme, se crede și acum că, spre deosebire de limbajul natural, bogat în conotații de ambele tipuri (convenționale și inedite), limbajul matematic este pur denotativ. A devenit aproape un truism afirmația că, în matematică, fiecare termen trebuie folosit în conformitate cu definiția prin care acel termen a fost introdus. Așa am susținut și noi în *Poetica matematică*. Am observat însă în aceeași lucrare că simbolul dx, care denotează diferențiala lui x, nu mai este folosit în această accepțiune în expresia integralei unei funcții. Acum putem preciza că aici este vorba de o conotație convențională, consacrată prin tradiție, justificată de faptul că, în anumite împrejurări, dx din expresia integralei unei funcții se comportă ca și cum ar fi o diferențială (a se vedea teorema de schimbare de variabilă). Notația clasică a integralei unei funcții pe intervalul $[a, b]$ este o adevărată expresie idiomatică a limbajului matematic. Rămînea însă deschisă problema posibilității, în limbajul matematic, a conotațiilor inedite (neconvenționale). Testul privind subșirurile monotone a permis un experiment instructiv în această privință. Este vorba de folosirea termenului de *subșir*.

În Analiza matematică, se spune despre un șir (b_n) că este un subșir al șirului (a_n) dacă există un șir strict crescător (p_n) de numere naturale, astfel încît $b_n = a_{p_n}$, oricare ar

fi numărul natural n. Deoarece şirul este o aplicaţie a mulţimii N a numerelor naturale, este clar că el are o infinitate de termeni; subşirul, fiind şi el un şir, va avea tot o infinitate de termeni. În domeniul Combinatoricii şi al Logicii matematice se adoptă o altă convenţie, care permite ca numărul termenilor unui şir să fie finit sau infinit (şirul este aici o aplicaţie fie a lui $\{1, 2, \ldots, n\}$, fie a lui N). Iată însă că, în ciuda preciziei definiţiei subşirului în Analiza matematică, unii studenţi s-au referit la subşiruri finite sau infinite, considerînd că un şir (a_n) convergent către a conţine un subşir majorat de a şi altul minorat de a, *cel puţin unul dintre ele fiind infinit*. Este clar că pentru aceşti studenţi analogia dintre cuvintele *subşir* şi *submulţime* (amîndouă sînt construite cu acelaşi prefix *sub*) a contaminat subşirul de unele trăsături ale submulţimii, uitîndu-se că subşirul, ca şir, nu este o mulţime, ci o funcţie. Dar, în acelaşi timp, reprezentîndu-se şirul convergent către a prin „reuniunea dintre şirul termenilor inferiori lui a, şirul termenilor superiori lui a şi şirul termenilor egali cu a", cum au procedat unii studenţi, chiar dintre cei mai buni, confuzia dintre un şir şi mulţimea elementelor care alcătuiesc termenii săi este atît de străvezie, încît aproape că nu mai are nevoie să fie penalizată. Putem eventual să admitem o atare licenţă de exprimare, acordîndu-i un statut de conotaţie. De altfel, chiar terminologia consacrată întreţine confuzia dintre statutul de funcţie şi cel de mulţime ale şirului; a se vedea, în acest sens, expresia curentă: „Şirul (a_n) *conţine* subşirul (a_{p_n})". Predicatul *conţine* este aici inadecvat, sugerînd o relaţie de incluziune a subşirului faţă de şir, ca şi cum ar fi vorba de o submulţime a unei mulţimi.

CONOTAŢIA, CA SURSĂ DE CONFUZIE

Exprimarea conotativă la care ne-am referit la sfîrşitul paragrafului precedent s-a dovedit benignă, neafectînd substanţa raţionamentului (ideea era de a se arăta că un şir (a_n) convergent către a conţine un subşir crescător sau descrescător, după cum prima sau a doua dintre mulţimile $\{n;\ a_n \leqslant a\}$, $\{n;\ a_n \geqslant a\}$ este infinită). În alte cazuri însă, confuzia dintre *subşir* şi *submulţime* s-a dovedit a avea consecinţe mai grave. Vom prezenta trei situaţii de acest fel, fiecare dintre ele cu o frecvenţă destul de mare.

Prima situaţie. Fie $b_n = \max\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$. Este clar că b_n, ca cel mai mare dintre primii n termeni ai şirului, este şi el un termen al şirului (a_n). Pe de altă parte, b_n nu poate

întrece pe b_{n+1}, deoarece prin trecerea de la o mulțime finită de numere reale la o supramulțime finită a ei maximul crește sau stă pe loc. De aici s-a dedus greșit că (b_n) este un subșir al lui (a_n).

A doua situație. Fie $b_n = \sup \{a_n, a_{n+1} \ldots\}$ și $c_n = \inf \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \ldots\}$, cu alte cuvinte b_n este marginea superioară a mulțimii termenilor de rang mai mare sau egal cu n iar c_n este marginea inferioară a aceleiași mulțimi. Șirul (b_n) este descrescător iar șirul (c_n) este crescător. De aici s-a dedus în mod abuziv că orice șir admite atît un subșir descrescător cît și un subșir crescător.

A treia situație. S-a considerat că într-un șir se poate schimba ordinea termenilor, astfel încît să se obțină un șir *monoton*, subșir al șirului inițial, deoarece este format cu termenii șirului inițial.

Prima din cele trei situații are la bază următoarea confuzie: ideea că este suficient ca termenii șirului (b_n) să fie recrutați dintre termenii șirului (a_n) pentru ca (b_n) să fie un subșir al lui (a_n). Cu alte cuvinte, ideea de subșir este redusă la faptul că mulțimea elementelor care apar ca termeni în (b_n) este conținută în mulțimea elementelor care apar ca termeni în (a_n). Nu este greu de găsit contraexemple la această pretenție. Șirul 1, 0, 1, 0, 1, 0... nu este subșir al șirului 1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, 0,..., deși fiecare element care este termen al primului șir este și termen al celui de al doilea șir. În prima situație, este suficient să presupunem că șirul (a_n) este strict descrescător, pentru a obține $b_n = a_1$ pentru orice n, deci șirul (b_n), ca șir staționar, nu este subșir al lui (a_n) (orice subșir al unui șir strict monoton este strict monoton). În a doua situație, b_n și c_n nu sînt totdeauna termeni ai șirului a_n; este suficient să considerăm șirul (r_n) format cu totalitatea numerelor raționale din intervalul deschis (0,1). Șirul (b_n) asociat este staționar, avînd toți termenii egali cu unu, iar șirul (c_n) este de asemenea staționar, avînd toți termenii egali cu zero. Nu numai că (b_n) și (c_n) nu sînt subșiruri ale lui (r_n), dar termenii primelor două șiruri (zero, respectiv unu) nici măcar nu se află printre termenii șirului (r_n). În sfîrșit, în a treia situație s-a pornit de la ipoteza falsă după care orice șir de numere reale poate fi reordonat, în așa fel încît să devină monoton. Șirul numerelor raționale este un contraexemplu la această ipoteză. Într-adevăr, nu poate exista un șir *monoton* alcătuit din *toate* numerele raționale, deoarece aceasta ar contrazice proprietatea de densitate a acestor numere (între două numere raționale există totdeauna un al treilea număr rațional, de

exemplu media aritmetică a celor două, deci există o infinitate).

Cele trei situații ilustrează tot atîtea eșecuri în tentativa de a arăta că orice șir de numere reale conține un subșir monoton.

CUM NEGĂM PROPRIETATEA DE MONOTONIE?

O serie de studenți, printre care unii reușiți cu medii frumoase la concursul de admitere (de exemplu, o absolventă a prestigiosului liceu „N. Bălcescu" din București, care a obținut media 8,33 la admitere) au ales următoarea strategie. Presupunîndu-se că nu există nici un subșir crescător, să se arate că există un subșir descrescător. O atare strategie presupunea în primul rînd negarea corectă a proprietății de șir crescător. Este regretabil că nu a fost nici un caz de negare corectă. Un șir este crescător dacă pentru orice număr natural n diferența $a_{n+1} - a_n$ este nenegativă. Rezultă că un șir nu este crescător dacă există un număr natural n astfel încît $a_{n+1} - a_n < 0$. În locul acestei variante corecte s-a propus varianta: Există un număr natural k astfel încît pentru orice $n > k$ avem $a_n < a_k$. Cu alte cuvinte, monotonia crescătoare ar reveni la faptul că pentru orice număr natural k există $n > k$ cu proprietatea $a_k \leqslant a_n$. Însă după această formulare ar rezulta concluzia absurdă că șirul 1, 2, 1, 2, ..., 1, 2, ... este crescător; într-adevăr, este suficient să luăm pentru k par, $n = k + 2$ iar pentru k impar, $n = k + 1$, pentru a avea $a_k \leqslant a_n$.

O problemă mai interesantă este aceea a negării noțiunii de monotonie ca atare (fie ea crescătoare sau descrescătoare). Desigur, am putea nega separat monotonia crescătoare și pe cea descrescătoare, luînd apoi conjuncția lor logică (negația lui „A sau B" este „non A și non B"), dar este posibilă și chiar mai elegantă negația directă. Să ne amintim că proprietatea de monotonie a unui șir (a_n) constă în faptul că există un semn (+ sau −) evitat de $a_{n+1} - a_n$ oricare ar fi numărul natural n. Enunțată sub această formă, proprietatea de monotonie se pretează mult mai bine la operația de negare, deoarece au fost puși în evidență cuantificatorii logici (adică predicatele care conțin pe *oricare* și pe *există*). Am mai văzut că *oricare* se neagă prin *există* iar *există* se neagă prin *oricare*, deci nemonotonia șirului (a_n) constă în faptul că există două valori m și p ale lui n, astfel încît $a_{m+1} - a_m$ și $a_{p+1} - a_p$ au semne opuse.

În aceeași ordine de idei putem discuta negarea proprietății unei funcții de a fi monotonă. Deoarece monotonia unei funcții $f: I \to \mathbf{R}$ constă în faptul că există un semn (+ sau —) evitat de $\mathbf{R}(x, y) = (f(x) - f(y))/(x - y)$ oricare ar fi x sau y în I cu $x \neq y$, nemonotonia revine la faptul că există două perechi de numere reale (t, u) și (v, w) cu $t \neq u$ și $v \neq w$, astfel încît $\mathbf{R}(t, u)$ și $\mathbf{R}(v, w)$ să aibă semne diferite.

După cum am mai putut vedea și cu altă ocazie, negarea constă în transformarea unei proprietăți negative în una afirmativă.

A FI LA OBIECT, ACT DE DISCIPLINĂ ELEMENTARĂ

Nu numai în matematică, dar în orice domeniu de activitate, un act de elementară disciplină este supunerea la obiect, în orice discuție pe o anumită temă. Lucrările scrise la concursurile de admitere în învățămîntul superior abundă în considerații străine de chestiunea care se cerea tratată. Faptul că problema propusă se referă la șiruri și subșiruri monotone nu înseamnă să folosim această ocazie pentru a etala cunoștințele noastre relative la aceste concepte. Au fost umplute pagini în care se amintesc: lema lui Cesaro, după care orice șir mărginit conține un subșir convergent, teorema după care orice șir convergent este mărginit, teorema care afirmă că orice șir monoton și mărginit este convergent etc. Desigur, unele dintre aceste fapte, ca lema lui Cesaro, puteau și chiar trebuiau să fie implicate în răspunsul la întrebarea formulată, dar ele au fost de multe ori fie menționate în mod gratuit, fie folosite în mod nefericit, în „silogisme" ca: „Șirul, fiind mărginit, conține un subșir convergent, deci monoton", ca și cum nu ar fi la îndemînă exemple atît de simple ca $1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, -1/6, \ldots$ de șiruri convergente care nu-s monotone.

Un alt mod de a nu fi la obiect constă în a lua lucrurile, cum se spune, „de la Adam și Eva". La o problemă care cere stabilirea convergenței unui anume șir se răspunde prin dezvoltarea prealabilă a unei adevărate lecții despre noțiunea de convergență. Dacă se cere demonstrația teoremei lui Lagrange a creșterilor finite, se demonstrează și teorema lui Rolle, pentru simplul fapt că este folosită în demonstrarea teoremei lui Lagrange etc. Desigur, invocarea teoremei lui Rolle este esențială în demonstrarea teoremei creșterilor finite, trebuind să se arate exact unde și cum intervine ea; dar de aici pînă la demonstrarea efectivă a teoremei lui Rolle

este o distanță mare. Atitudini de acest fel îi pun pe unii candidați în situația neplăcută de a intra în criză de timp, ratînd răspunsul la alte chestiuni. Ceea ce rămîne fără consecințe imediate în condiții normale, se soldează cu consecințe grave în condițiile unei probe contra cronometru.

A NU COMPLICA LUCRURILE ÎN MOD INUTIL

Iată un deziderat foarte des încălcat! Complicarea inutilă se referă atît la aspectul logic cît și la cel lingvistic, dar cît de legate sînt între ele aceste două aspecte! Am propus un test constînd în următoarea întrebare: *Este adevărat că orice șir de numere reale admite cel mult o limită*? Limita unui șir are, după cum se știe, proprietatea că orice vecinătate a ei lasă afară cel mult un număr finit de termeni ai șirului. Care era calea naturală de abordare a acestei chestiuni? Evident, prin metoda reducerii la absurd. Aceasta implică negarea corectă a existenței a cel mult unui punct-limită. Scrisă în formă convenabilă, proprietatea care trebuie negată este următoarea: Oricare ar fi șirul (a_n) de numere reale, există cel mult un număr real a cu proprietatea că orice vecinătate a lui a lasă afară cel mult un număr finit de termeni ai șirului (a_n). Negația corectă este: Există un șir (a_n) cu proprietatea că pentru cel puțin două numere b și c diferite între ele orice vecinătate V_b a lui b și orice vecinătate V_c a lui c lasă afară cel mult un număr finit de termeni ai șirului (a_n). Contradicția se obține imediat, luînd vecinătățile V_b și V_c destul de mici pentru a fi disjuncte și constatînd că ele sînt totuși obligate să conțină o infinitate de termeni comuni ai șirului (a_n). Iată însă că un student care a intrat cu o medie peste 9 la secția de Informatică neagă unicitatea limitei în modul următor: „Presupunem că șirul dat ar avea $n \geqslant 2$ puncte-limită, $a_1, \ldots, a_n$, diferite între ele și ordonate crescător pe axa reală". Este lesne de înțeles la ce complicații inutile conduce un atare demers în care în loc de $n = 2$ se ia în mod inutil $n \geqslant 2$.

Numeroase complicații inutile se referă la excesul de simbolistică, acolo unde exprimarea prin cuvinte ar fi mai simplă, mai directă și mai expresivă. Astfel, pentru a exprima faptul că orice vecinătate V_a a lui a conține o infinitate de termeni ai șirului (a_n), se recurge la următoarea scriere: $V_a \cap \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots;\ a \text{ real},\ n \text{ natural}\} = \text{infinită}$. Constatăm astfel și riscurile folosirii inutile a simbolurilor. Controlul devine precar iar rezultatul, în loc să fie un spor de rigoare,

este un imprevizibil absurd. Într-adevăr, să analizăm exprimarea simbolică de mai sus. Desfacerea lui a_n în a și n este la fel de justificată ca și pretenția pe care ar formula-o cineva ca sensul cuvîntului *carton* să fie interpretat drept o combinație între sensul lui *car* și cel al lui *ton*. Așezînd termenii șirului între acolade, nu mai este vorba de un șir, ci de o mulțime, dar o mulțime bizară, în care un același element poate să apară de mai multe ori. Astfel, pentru șirul 1, 0, 1, 0, , 1, 0, ... intersecția de mai sus este finită, oricare ar fi punctul a și vecinătatea V_a. Este clar că exprimarea a trădat aici intenția autorului ei, care de fapt ar fi vrut să spună că mulțimea $\{n;\ a_n \in V_a\}$ este infinită, oricare ar fi vecinătatea V_a a lui a.

Alte complicații rezultă din neglijarea posibilităților de simplificare, care apar chiar în punctul de plecare. În demonstrarea faptului că orice șir de numere reale admite un subșir monoton, distingem mai întîi șirurile mărginite de cele nemărginite. Pentru acestea din urmă identificăm ușor un subșir care tinde crescător la plus infinit sau descrescător la minus infinit. În ceea ce privește șirurile mărginite, aplicăm mai întîi lema lui Cesaro, care asigură existența unui subșir convergent, iar apoi din acesta din urmă extragem un subșir monoton. Apare astfel un subșir al unui subșir, ceea ce conduce la termeni cu indici etajați. Dacă termenul general al șirului inițial era a_n, la subșir obținem a_{p_n}, iar la un subșir al subșiru lui obținem $a_{k_{p_n}}$, o notație care în mod sigur îl va enerva pe tipograf și există o probabilitate mare ca ea să apară deformată; într-adevăr, nu este ușor să introduci pe un rînd obișnuit o notație cu patru etaje. Există o ieșire din această situație? Da, există. Șirul inițial (a_n) este mărginit. În baza lemei lui Cesaro, în loc să trecem la un subșir convergent, putem admite, fără micșorarea generalității, că șirul (a_n) însuși este convergent, ocupîndu-ne în continuare de extragerea unui șir monoton. În felul acesta, nu vom depăși trei etaje. Dar putem conveni să notăm cu $a(n)$ ceea ce de obicei se notează cu a_n și cu $a(p(n))$ ceea ce de obicei se notează cu a_{p_n}. În acest fel scăpăm complet de etaje.

Însă formele de complicare inutilă a notațiilor sînt nenumărate. Ele introduc factori de risc, pe care mai cu seamă un începător cu greu îi poate controla. Unul din sfaturile care se dau cuiva care se inițiază într-o limbă străină este de a evita frazele lungi. Matematica este și ea o limbă; în practicarea ei este bine să evităm nu numai frazele prea lungi, dar și enunțurile inutil încărcate cu simboluri și formule.

Acest principiu este valabil nu numai pentru începători, ci și pentru avansați. Matematicianul american Paul Halmos consideră că cea mai bună notație este: nici o notație *(the best notation is no notation)*. Aceasta vrea să spună să nu folosim o notație decît atunci cînd nu ne putem descurca fără ea.

DIN IGIENA GÎNDIRII MATEMATICE

Aș repartiza deficiențele manifestate de candidați la probele de matematică în trei categorii: deficiențe matematice propriu-zise, deficiențe de logică și deficiențe de exprimare (deci de ordin lingvistic). Desigur, aceste deficiențe apar de multe ori combinate, demarcația lor devenind dificilă.

În ceea ce privește deficiențele matematice propriu-zise, se constată un antrenament insuficient al celor mai mulți candidați (chiar al unora care obțin note finale peste 7) în folosirea conceptelor de bază. Fenomenul este cu deosebire vizibil la Analiză matematică, unde se introduc concepte delicate, de natură calitativă și procesuală, cum sînt convergența, mărginirea, monotonia, continuitatea, derivabilitatea, integrabilitatea. Nu este vorba de simpla reproducere a definițiilor lor, ci de utilizarea lor în situații concrete. Unul dintre testele cele mai simple prin care candidații pot verifica modul în care au asimilat noțiunile de bază este capacitatea de a le recunoaște și de a le manipula atunci cînd notația folosită nu mai este cea standard, din manual sau de la clasă. Imaginați-vă că în locul tradiționalului epsilon folosim, de exemplu, litera a, iar în locul lui $\mathbf{N}$ îl folosim pe epsilon; mai recunoașteți proprietatea de convergență a unui șir? Nu este vorba însă numai de atît. În activitatea la clasă, tema tratată este anunțată la începutul orei, iar în manual orice problemă este încadrată la un anumit capitol tematic; o atare informație ne avertizează de la început asupra noțiunilor și metodelor care trebuie utilizate. Cu totul alta este situația în practica matematică obișnuită și, în particular, la un examen cum este acela de admitere în facultate. Aici, nu mai există nici o indicație preliminară asupra instrumentului care trebuie folosit (în afară de indicația, destul de vagă, privind apartenența acestui instrument la programa matematică școlară; dar unii candidați, probabil dopați de meditatori pricepuți mai degrabă la trucuri decît în folosirea gîndirii matematice autentice, nu respectă nici măcar această indicație, recurgînd în mod gratuit, ostentativ și snob la instru-

mente și cunoștințe care depășesc programa școlară). Pornind de la problemă, candidatul trebuie să identifice instrumentul natural pe care problema îl reclamă. Tocmai un antrenament de acest tip, în care candidatul este orientat nu atît în a dezvolta aplicații ale unui anumit concept sau ale unei anumite teoreme, ci în a identifica, pornind de la o problemă, teorema sau conceptul de care este nevoie pentru rezolvare, se constată a fi absent din pregătirea multor candidați. Una este să înveți procedurile de rutină prin care derivata se folosește în studiul extremelor unei funcții, altceva este ca, pornind de la o problemă practică, să-ți dai seama că ea revine la o problemă de extremum. Dar dacă ești obsedat de ideea că o atare problemă se rezolvă cu ajutorul derivatei, se poate întîmpla să nu observi că derivata este inutilizabilă, deoarece punctul în discuție nu este interior intervalului de definiție ci la extremitatea sa; iar, dacă utilizarea derivatei este neconcludentă, să nu observi că problema de extremum se rezolvă direct, prin considerații „de bun-simț", fără să fie nevoie de derivată. (De exemplu: Este nevoie de vreo derivată pentru a-mi da seama că funcția $f(x, y) = x^2 + y^2$ admite un minim în origine?).

Această sesizare a sensului unei probleme este esențială, înainte de a trece la calcule. O mare parte din eforturile dezvoltate de candidați la admitere ar putea fi evitate dacă s-ar citi cu atenție și de mai multe ori enunțul problemei. Iată și un alt exemplu. Există un principiu simplu, de natură să reducă sensibil calculele, dar acest principiu este de multe ori nesocotit. Avem în vedere faptul că dacă datele unei probleme sînt simetrice în raport cu anumiți parametri, atunci și soluția va fi simetrică în raport cu acești parametri. Dacă o funcție este pară, este suficient s-o studiem pentru valorile pozitive ale argumentului. La fel, dacă este impară. Comportarea ei pentru valorile negative ale argumentului rezultă automat. Cu deosebire în studiul variației funcțiilor, astfel de considerente de simetrie sînt foarte utile, dar de multe ori nesocotite.

În ceea ce privește efectuarea calculelor, cel puțin o observație se impune. Candidații invocă de multe ori argumentul unor scăpări datorită nu ignoranței, ci neatenției. Însă matematica se bazează în bună măsură pe capacitatea de a conduce pînă la capăt un raționament mai lung sau un calcul mai laborios. Menținerea unei concentrări a atenției asupra obiectului, pe o durată ceva mai mare, face parte organică din gîndirea matematică. Desigur, scăpările de atenție sînt, pînă la un punct, explicabile. Dar un candidat bine antrenat

ştie că fiecare etapă a unui calcul trebuie verificată de două ori înainte de a se trece la etapa următoare. În acest fel, eventualele greşeli provenite din neatenţie sînt detectate şi înlăturate la timp. Altfel, o simplă greşeală de calcul se transmite la etapele ulterioare ale calculului, amplificîndu-şi consecinţele. În aceste condiţii, descoperirea greşelii devine mai dificilă, candidatul intră în criză de timp şi nu mai poate repara nimic.

Există apoi anumite chestiuni care se dovedesc a constitui adevărate capcane pentru candidaţi. Două exemple: modulul şi logaritmul. Una dintre probleme s-a referit, într-un an, la derivabilitatea modulului unei funcţii. O atare chestiune nu mai este o simplă rutină, ci pretinde să se meargă la sursa lucrurilor, adică la definiţia derivabilităţii şi la definiţia modulului. Unii candidaţi au crezut (sau au acceptat în mod conştient) că funcţionează un fel de permutabilitate, pe baza căreia derivata modulului este egală cu modulul derivatei. Dar în ştiinţă şi, cu deosebire, în matematică (şi cu atît mai mult în Analiza matematică) simţul comun este de multe ori duşmanul adevărului. Să nu uităm că procesele pe care le are în vedere Analiza matematică au o infinitate de etape, în timp ce intuiţia curentă este formată pe baza experienţei noastre imediate, esenţial finite.

Cu greşelile de logică, situaţia este mai gravă. Cred că prima îndatorire a unui elev, nu numai la matematică ci la orice disciplină, este de a distinge lucrurile care au sens de cele care nu au. Nu afirmaţiile greşite sînt cele mai grave în lucrările candidaţilor, ci afirmaţiile fără sens. Ce se poate spune, de exemplu, despre o afirmaţie (desprinsă din lucrarea unui candidat) ca: „Pentru orice epsilon mai mare ca zero există N astfel încît a_n este mai mic decît epsilon"? O atare afirmaţie nu este nici adevărată nici falşă, ci lipsită de sens. Cum este posibil ca un parametru (în cazul de faţă N) care apare în premisă să dispară din concluzie? Aici nu mai este vorba de o lacună în cunoştinţele de matematică, ci de o deficienţă mult mai gravă, care pune sub semnul întrebării întreaga pregătire şcolară şi nu numai pe aceea şcolară, ci şi pregătirea pentru viaţa practică.

Din păcate, fenomenul semnalat mai sus prezintă o deosebită amploare. Se pare că mulţi dintre candidaţi nu realizează gravitatea sa. O regulă elementară de igienă a gîndirii şi a redactării pretinde ca fiecare propoziţie (logică sau gramaticală) să fie revăzută şi controlată cu atenţie. Candidatul trebuie să se pătrundă de faptul că fiecare lucru pe care îl scrie este asumarea unei răspunderi. Mai bine o lucrare neter-

minată, dar care poartă amprenta acestui simţ de răspundere, decît multe pagini umplute cu lucruri care nici măcar nu au fost recitite după ce au fost scrise.

După boala gravă a exprimărilor fără sens, se plasează, poate mai puţin gravă, dar destul de nocivă şi foarte răspîndită, boala umplerii paginilor cu consideraţii în afara chestiunii. Un candidat se prevalează de continuitate pentru a stabili integrabilitatea unei funcţii şi foloseşte această ocazie pentru a umple o pagină cu enumerarea tuturor proprietăţilor funcţiilor continue, pentru unele dînd chiar şi demonstraţii. Să ne mai mirăm că un asemenea candidat intră în criză de timp, se plînge că „s-a dat prea mult" şi rămîne cu unele probleme netratate?

Grave deficienţe se manifestă în înţelegerea unor noţiuni fundamentale de logică: distincţia dintre o condiţie necesară şi una suficientă, ideea de generalizare a unui concept sau rezultat, ideea de reciprocă a unei teoreme, ideea de întărire a unei teoreme, distincţia dintre ipoteză şi concluzie. O capcană foarte periculoasă se constată a fi negarea unei proprietăţi. Foarte puţini candidaţi neagă corect proprietăţi dintre cele mai simple, cum ar fi mărginirea unei funcţii sau monotonia unui şir. Să nu uităm că raţionamentele prin reducere la absurd — atît de frecvente în matematică — se bazează pe negarea unei anumite proprietăţi: dacă aceasta nu se efectuează corect, întregul raţionament este compromis. O altă distincţie insuficient asimilată este aceea dintre cuantificatorul logic existenţial şi cel universal. Raţionamentele matematice se bazează în mare măsură pe o combinare adecvată a lui *există* cu *oricare ar fi*. Dacă aceste aspecte sînt bine explicitate, negarea proprietăţilor respective este considerabil facilitată.

Deficienţele de exprimare sînt organic legate de cele discutate mai sus. Poate că cel mai bine ar fi să amintim aici cîteva reguli ale folosirii limbajului într-o lucrare de examen (şi nu numai aici): Să dai informaţia care ţi se cere (nici mai puţin, dar nici mai mult); să-ţi susţii afirmaţiile prin argumente; să eviţi prolixitatea, obscuritatea în exprimare; să fii scurt şi ordonat.

După cum observam, lectura lucrărilor candidaţilor este considerabil îngreunată de faptul că multe pagini abundă în consideraţii în afara chestiunii. Se pare că unii candidaţi pornesc de la premisa că hîrtia rabdă orice şi că e mai bine să umpli paginile cu ce se nimereşte decît să le dai albe.

Nu! A arăta că-ți dai seama că nu poți răspunde la o anumită întrebare este considerabil mai decent decît a masca acest lucru prin mijloace dubioase.

CAPCANELE INDUCȚIEI

Două dintre chestiunile propuse candidaților la proba de Analiză matematică, la admiterea din 1983, au avut în vedere folosirea unui raționament prin inducție completă. Din păcate, un mare număr de candidați nu au putut să se prevaleze în mod corespunzător de acest tip de raționament.

Prima chestiune cerea să se arate că derivata de ordinul n a funcției $f(x) = e^{-x^2}$ are forma $f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}$, unde $P_n(x)$ este o funcție polinomială de gradul n în x. Care este răspunsul corect la această chestiune? Principiul inducției complete comportă două etape, prima fiind verificarea proprietății în discuție pentru $n = 1$, iar a doua etapă constînd în a arăta că dacă proprietatea este adevărată pentru o valoare neprecizată a lui n, atunci ea are loc și pentru valoarea imediat următoare $n + 1$. Trebuie deci să verificăm mai întîi că prima derivată a funcției f în discuție este produsul dintre o funcție polinomială de gradul întîi și funcția f. Într-adevăr, prin derivare se obține $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, coeficientul $-2x$ fiind, evident, o funcție polinomială de gradul întîi. Presupunînd acum că $f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}$, trebuie ca prin derivare să obținem $f^{n+1}(x) = P_{n+1}(x)\, e^{-x^2}$, unde $P_{n+1}(x)$ este o funcție polinomială de gradul $n + 1$. Derivînd, după regula de derivare a unui produs, obținem $f^{n+1}(x) = P_n'(x)\, e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}P_n(x) = (P_n'(x) - 2xP_n(x))\, e^{-x^2}$. După cum se știe, prin derivare gradul unei funcții polinomiale scade cu o unitate, deci $P_n'(x)$ este o funcție polinomială de gradul $n - 1$. Deoarece produsul a două funcții polinomiale este o funcție polinomială de grad egal cu suma gradelor celor două funcții, expresia $-2xP_n(x)$ este o funcție polinomială de gradul $n + 1$. Suma a două funcții polinomiale, prima de grad inferior celei de a doua, este o funcție polinomială de gradul celei de a doua. Deci $P_n(x) - 2xP_n(x)$ este funcția $P_{n+1}(x)$ căutată. Problema este astfel complet rezolvată.

Să facem acum cîteva comentarii. În legătură cu raționamentele prin inducție completă distingem două situații. Le prezentăm în secțiunea dedicată numerelor naturale, dar este bine să reluăm discuția lor aici, în raport cu pro-

blema concretă la care ne referim. Prima situație, în care intră și problema de mai sus, ne invită la o simplă verificare a unei proprietăți depinzînd de numărul natural n și care ne este dată chiar prin enunțul problemei. Efortul de imaginație este aici minim. Urmăriți raționamentul de mai sus; el s-a redus la aplicarea literală a principiului inducției complete, ceea ce a revenit în cazul de față la cunoașterea regulilor elementare de derivare. Această comoditate s-a datorat faptului că proprietatea depinzînd de numărul natural n nu trebuia să fie descoperită de noi, ci ne era dată chiar prin enunț: $f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}$.

Există însă și o a doua situație, în care proprietatea depinzînd de n nu ne este dată prin enunț, ci trebuie descoperită. De exemplu, problema de mai sus ar fi putut fi înlocuită cu: Să se găsească o relație între funcția $f(x) = e^{-x^2}$ și derivata ei de ordinul n. Matematica școlară ne-a furnizat destule exemple de ambele tipuri. Formula binomului lui Newton poate fi *verificată* prin inducție completă, dar poate fi și *descoperită* pe această cale. La fel, formula care dă suma pătratelor primelor n numere naturale.

De fapt, cuvîntul *inducție* este mai adecvat celei de a doua situații. Inducția, în sensul ei intuitiv de procedare de la particular spre general, se manifestă tocmai în tatonarea unor cazuri particulare și în imaginarea unor ipoteze privind cazul general. Dar orice bănuială în această privință trebuie testată prin aplicarea teoremei cunoscute sub numele de principiul inducției complete, în care, împotriva denumirii folosite, avem a face cu un raționament deductiv (ca în orice teoremă). Putem deci spune că a doua situație este mai complexă decît cea dintîi, deoarece o conține pe aceasta ca o parte organică a ei.

Să ne întoarcem acum la problema în discuție, propusă la admiterea din iulie 1983. Deși este evident că ea conduce la o situație de primul tip, mulți candidați au tratat-o ca și cum ar fi de al doilea tip, procedînd, în mod absolut inutil, la calculul derivatelor de ordinul al doilea, al treilea, al patrulea, unii mergînd chiar și mai departe. Lucrul acesta și-ar fi avut rostul dacă structura derivatei de ordinul n nu era dată prin enunț, ci trebuia descoperită. Dar complicațiile inutile nu s-au oprit aici; mulți candidați au căutat să stabilească chiar coeficienții polinomului P_n, deși era clar din enunț că ceea ce se cerea erau *natura polinomială* a coeficientului lui e^{-x^2} din expresia derivatei de ordinul n și *gradul* polinomului respectiv. În sfîrșit, o altă categorie de candidați s-a mulțumit să calculeze derivatele de ordinul

întîi, al doilea, al treilea, al patrulea ale lui e^{-x^2}, după care au adăugat pur și simplu: „Se vede că forma derivatei de ordinul n este $P_n(x)\, e^{-x^2}$". Procedînd astfel, candidații respectivi au eludat cea de a doua etapă a raționamentului prin inducție completă. Nu au lipsit nici cei (mai puțini, e drept) care au eludat prima etapă a inducției, trecînd direct la derivarea lui $f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}$. În definitiv, toate variantele trecute în revistă au ceva comun: neînțelegerea raționamentului prin inducție completă. O problemă care, după cum am văzut, se putea rezolva printr-un calcul simplu, de rutină, de cîteva rînduri, a fost complicată în mod inutil, răpind astfel din timpul pe care candidații trebuiau să-l acorde celorlalte probleme.

Cealaltă problemă implicînd un raționament prin inducție completă cerea să se arate că șirul (x_n) definit prin $x_0 = a > 1$ și prin $x_{n+1} = e^{-1+x_n}$ este monoton crescător, examinîndu-se totodată limita șirului. Spre deosebire de cele mai multe probleme comportînd un raționament prin inducție completă, unde atenția principală este solicitată de a doua etapă a inducției, aici a doua etapă este imediată, prima fiind etapa mai dificilă. Prima etapă revine la a arăta că e^{-1+x} este mai mare decît x, de îndată ce x este mai mare decît unu. Să punem $g(x) = e^{x-1} - x$. Avem de arătat că dacă x este mai mare decît 1 atunci $g(x)$ este mai mare decît zero. Derivînd, obținem $g'(x) = e^{x-1} - 1 > 0$ pentru $x > 1$, deci g este crescătoare pentru $x > 1$. Fiind și continuă, și avînd $g(1) = 0$, rezultă că $g(x) > 0$ pentru $x > 1$. Am parcurs astfel prima etapă a inducției: x_1 este mai mare decît x_0. Să observăm acum — și aceasta revine tot la un raționament prin inducție completă — că fiecare termen x_n este superior lui 1. Într-adevăr, pentru x_0 aceasta rezultă din enunț, iar pentru x_n rezultă din faptul că e^y este superior lui 1 ori de cîte ori y este pozitiv. Dacă admitem acum că x_n este superior lui x_{n-1}, atunci e^{-1+x_n} va fi superior lui $e^{-1+x_{n-1}}$ (funcția e^y fiind crescătoare pentru y pozitiv), deci x_{n+1} este superior lui x_n.

Din păcate, și aici foarte mulți candidați au propus, în locul raționamentului simplu de mai sus, înlocuirea succesivă a lui x_1 în expresia lui x_2, a lui x_2 astfel obținut în expresia lui x_3 ș.a.m.d., obținîndu-se astfel o expresie cu un număr crescînd nelimitat de exponenți, expresie care, singură, n-avea cum să conducă la rezultat.

Mulți candidați s-au păcălit și în ceea ce privește valoarea limitei șirului (căzînd în capcana care ne pîndește ori de cîte ori pierdem din vedere datele problemei), propunînd

următorul pseudoraționament: Deoarece orice șir crescător are limită, să punem lim $x_n = x$. Din $x_{n+1} = e^{-1+x_n}$ deducem atunci $x = e^{-1+x}$, relație satisfăcută de $x = 1$; deci limita șirului este 1. S-a pierdut astfel din vedere faptul că un șir crescător în care termenii sînt superiori lui 1 nu poate avea decît o limită superioară lui 1. Raționamentul corect era deci următorul. Deoarece (x_n) este crescător, există limita sa, finită sau infinită. Dacă ar fi finită, ar fi egală cu 1, ceea ce conduce la o contradicție. Rezultă deci că limita este $+\infty$.

DE CE SIMPLU, CÎND SE POATE ȘI COMPLICAT?

O altă chestiune la admiterea din iulie 1983 cerea să se calculeze integrala de la 0 la 2 a funcției f definite pe $[0, 2]$ prin $f(x) = \min(x, 2/(1 + x^2))$. Aproape toți candidații au procedat aici la investigarea migăloasă a diferenței $x - 2/(1 + x^2)$, după rețeta aplicată de obicei în studiul variației unei funcții (derivate, puncte de extrem, creștere, descreștere, asimptote etc.), mulți complicîndu-se în calcule interminabile, întinse pe multe pagini. Unii au ajuns, pe această cale inutil complicată, la un rezultat corect. Dar problema poate fi rezolvată în trei rînduri, cu o condiție: înainte de a ne repezi să aplicăm o rețetă, este necesar să sesizăm sensul problemei, fără de care riscăm oricînd să devenim ridicoli, aducînd un tun pentru a omorî o muscă. Musca este aici faptul următor: Cînd x rămîne între 0 și 1, $1 + x^2$ rămîne între 1 și 2, deci fracția $2/(1 + x^2)$ este supraunitară, ceea ce înseamnă că, pentru x cuprins între 0 și 1, avem $f(x) = x$. Dacă x se află între 1 și 2, atunci $1 + x^2$ întrece pe 2, deci valoarea expresiei $2/(1 + x^2)$ este inferioară lui 1. Rezultă că, pentru x cuprins între 1 și 2, avem $f(x) = 2/(1 + x^2)$. Rămîne acum să se integreze pe x între 0 și 1, și pe $2/(1 + x^2)$ între 1 și 2, lucru la îndemîna oricărui cititor.

CUM „LIPIM" PRIMITIVELE?

Tot la admiterea din iulie 1983 a mai fost propusă următoarea chestiune. Să se arate că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = 1$ pentru x negativ și $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^{1/2}$ pentru x pozitiv sau nul admite primitive și să se calculeze o primitivă a acestei funcții.

Prima observație privește continuitatea lui f în origine, datorită faptului că limitele la stînga și la dreapta sînt amîn-

două egale cu 1. A doua observație privește faptul că între paranteze se află pătratul binomului $x - 1$, deci expresia simplificată a lui f pentru x pozitiv sau nul este $f(x) = |x-1|$ (unii candidați au omis aici modulul). De aici rezultă că pentru x cuprins între 0 și 1 avem $f(x) = 1 - x$, iar pentru x superior lui 1 avem $f(x) = x - 1$. Funcția f se prezintă deci, definită pe $\mathbf{R}$, cu trei expresii distincte, egale respectiv cu 1 pentru x negativ, cu $1 - x$ pentru x cuprins între 0 și 1 și cu $x - 1$ pentru x superior lui 1, în punctele 0 și 1 fiind, după cum se vede ușor, indiferent care dintre cele două expresii posibile este considerată.

Nu este nici o dificultate să se determine primitivele lui f pe fiecare dintre cele trei intervale de mai sus, luate separat. Mai toți candidații au indicat corect aceste primitive, sub forma: $x + C_1$, $x - (x^2/2) + C_2$ și respectiv $(x^2/2) - x + C_3$. Chestiunea este cum anume „lipim" aceste primitive în punctele 0 și 1. Din păcate, foarte puțini candidați au tratat complet această chestiune. O primă categorie de candidați s-a limitat la scrierea, ca mai sus, a primitivelor pe intervalele $(-\infty, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \infty)$, crezînd că ele furnizează în mod automat primitivele pe $\mathbf{R}$. Însă nu este greu de văzut că, pentru unele valori ale constantelor C_1, C_2, C_3 nu se asigură nici măcar continuitatea ipoteticei primitive. De exemplu, pentru $C_1 \neq C_2$ limita la stînga în origine a primitivei pe $(-\infty, 0)$ nu este egală cu limita la dreapta în origine a primitivei pe $(0, 1)$. Tot așa, pentru $C_2 = C_3$ obținem o discontinuitate în 1. Soluția corectă cere să se considere $C_1 = C_2$, iar pentru C_3 să se aleagă o funcție convenabilă de C_2, pentru a se asigura astfel continuitatea în 1. Nu este greu de văzut că alegerea $C_3 = C_2 - 1$ răspunde acestui deziderat. Unii candidați au reușit să „lipească" primitivele în acest mod, pentru a realiza continuitatea în 0 și în 1, dar foarte puțini au fost cei care și-au dat seama că nici acest raționament nu este suficient pentru a ne asigura că lipirea primitivelor pe cele trei intervale conduce la primitive pe $\mathbf{R}$. Într-adevăr, continuitatea este *necesară* pentru o funcție care revendică proprietatea de a fi primitivă a unei funcții reale de variabilă reală, dar *nu este suficientă*. Trebuie să ne asigurăm de derivabilitatea în 0 și în 1 a funcției obținute prin lipirea de mai sus. Nu este greu de verificat că alegerea care a asigurat continuitatea în 0 și 1 asigură și derivabilitatea, în așa fel încît derivata să fie $f(x)$. Esențial aici era faptul de a-ți pune întrebarea; răspunsul la ea nu comportă dificultăți.

O altă chestiune propusă la admiterea din iulie 1983 cerea să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției

$f(x) = \ln |x - 4|$ dacă $x \in \mathbf{R} - [7/2, 9/2]$ și $f(x) = a \sin 2x + b$ dacă x se află în intervalul $[7/2, 9/2]$. Ne întîlnim aici cu capcanele obișnuite ale modulului și ale logaritmului, pe care le-am mai discutat cu alte prilejuri. Nu cred că este cazul să mai revenim.

După cum se poate vedea, candidatul intră în criză de timp nu pentru că chestiunile propuse ar fi prea laborioase, ci pentru că se angajează pe căi inutil complicate, preferînd să aplice o rețetă decît să gîndească.

A NEGA CORECT ȘI EFICIENT

Orice raționament prin reducere la absurd comportă negarea unei propoziții, a propoziției care trebuie demonstrată. Deoarece reducerea la absurd este o modalitate foarte frecventă în matematică, negarea devine și ea o operație curentă; o operație pe care trebuie s-o cunoaștem, pe care o putem cunoaște deoarece se efectuează, într-o mare măsură, după reguli bine stabilite. În matematică, arta negării constă în transformarea unei propoziții negative într-o propoziție echivalentă cu prima, dar afirmativă. Sub formă brută, o negație conduce la o propoziție de tipul *Nu este adevărat că...* Dacă însă vrem să tragem consecințele unei astfel de propoziții negative, este nevoie s-o transformăm într-o propoziție afirmativă echivalentă. Această transformare se face după un procedeu care în mare măsură poate fi explicitat sub formă de reguli, pe care vom căuta să le indicăm. În acest scop, ne vom opri asupra modului în care funcționează mecanismul negației în Analiza matematică, domeniu mai delicat, în care descrierea oricărui concept are un caracter procesual. Să mai observăm că negarea nu pune numai probleme de corectitudine, ci și probleme de comoditate și eficiență, așa cum vom vedea.

Regula generală a negării constă în înlocuirea afirmațiilor existențiale prin afirmații universale și a celor din urmă prin cele dintîi; în același timp, sensul anumitor inegalități se schimbă. Negarea trebuie să mai țină seamă de relațiile lui De Morgan: Negarea disjuncției logice a mai multor propoziții constă în conjuncția negațiilor acestor propoziții. Negarea conjuncției logice a mai multor propoziții constă în disjuncția logică a negațiilor acestor propoziții.

Un prim exemplu va fi cel al proprietății de convergență. Se știe că această proprietate poate fi definită în mai multe moduri echivalente. Modul de negare va depinde de varianta

aleasă. Însă oricare ar fi varianta de definiție pe care o alegem trebuie să avem grijă ca toți cuantificatorii logici să fie explicitați; aceasta este o premisă a unei negări corecte. Să considerăm, de exemplu, următoarele variante ale definiției convergenței unui șir (a_n).

A) Limita șirului (a_n) există și este finită.

B) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural N, astfel încît oricare ar fi m și n mai mari decît N avem $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

C) Lui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr natural N cu proprietatea că din $m, n > N$ rezultă $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

D) Oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde N astfel încît pentru $n > N$ avem $|a_n - a| < \varepsilon$, unde a este un număr real.

E) Există un număr real a astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ există N cu proprietatea că oricare ar fi n mai mare decît N are loc inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$.

Nu oricare dintre variantele de mai sus, toate corecte (cu o rezervă față de varianta D, în care exprimarea *unde* a *este un număr real* este echivocă, nefiind clar dacă este vorba de un *anumit* număr real sau de un număr real *oarecare*) se pretează la fel de bine operației de negare. În varianta A, negarea ar fi: *Sau șirul* (a_n) *nu are limită sau are limită infinită.* Însă acest enunț conține la rîndul său o negație sub formă brută, care așteaptă să fie transformată într-un enunț afirmativ echivalent: *șirul* (a_n) *nu are limită.* Pentru a realiza această transformare, trebuie să recurgem la o definiție a limitei care pune în evidență cuantificatorii logici; însă această definiție va fi formulată în mod diferit, după cum limita este un număr real, $+\infty$ sau $-\infty$, fapt care complică lucrurile. Este limpede că varianta A, deși corectă, nu este o alegere fericită pentru operația de negare.

Varianta C, vizibil echivalentă cu varianta B, este inferioară acesteia din urmă, deoarece nu explicitează caracterul existențial sau universal al cuantificatorilor logici pe care îi conține. Vom prefera deci lui C pe B. Nu putem însă da un criteriu general de preferință între B și E. Amîndouă se pretează foarte bine operației de negare. Negarea lui B este: Există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît, oricare ar fi N, există m și n superiori lui N, pentru care $|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon_0$. Negarea lui E este: Fiecărui număr real a îi corespunde un număr pozitiv ε, astfel încît oricare ar fi numărul natural N, există $n > N$ satisfăcînd inegalitatea $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$. Alegerea între aceste două variante se face în funcție de problema concretă care trebuie rezolvată.

Este clar, din cele de mai sus, că nu este suficient să negăm în mod corect; există totdeauna mai multe variante de negare

corectă, dar numai unele sînt și eficiente. De obicei, una anume este cea mai eficientă. Intuiția și experiența noastră matematică ne ajută s-o identificăm.

Dar în ce constă eficiența unui procedeu de negare? Nu trebuie să uităm că, într-un raționament prin reducere la absurd, urmărim să arătăm că negația propoziției pe care vrem s-o demonstrăm conduce la o contradicție. Eficiența unui procedeu de negare constă deci în capacitatea sa de a dezvălui consecințele negației propoziției în discuție, consecințe care conduc la o contradicție cu ipotezele asumate. Fără a pretinde că dăm o rețetă a eficienței, unele indicații pot totuși fi utile. Astfel, dacă în formularea negației intervine și cuantificatorul universal, asupra lui trebuie să ne îndreptăm atenția în obținerea consecințelor negației.

Să considerăm, pentru ilustrare, teorema care afirmă că orice funcție f continuă pe intervalul închis și mărginit $[a, b]$ este mărginită. Demonstrația acestei teoreme se poate face prin reducere la absurd. Este nevoie, pentru aceasta, să negăm proprietatea de mărginire; Oricare ar fi numărul real M, există x în $[a, b]$ pentru care $|f(x)|$ întrece pe M. Să folosim acum indicația dată mai sus, privind folosirea cuantificatorului universal. Fiind vorba de *orice număr real* M, cum este clar că M e interesant prin valorile sale mari, vom da lui M valorile 1, 2, 3, ..., n, și vom obține, pentru fiecare număr natural n un punct x_n din $[a, b]$ pentru care $|f(x_n)| > n$. Șirul mărginit (x_n) admite un subșir convergent: să presupunem că șirul (x_n) însuși este acest subșir și fie x limita sa care, evident, va aparține lui $[a, b]$. Datorită continuității lui f în x, șirul $(f(x_n))$ va converge către $f(x)$, în contradicție cu inegalitatea de mai sus, care-l obligă să fie divergent.

INEGALITĂȚI ÎN ANALIZA MATEMATICĂ

Oricine a trecut măcar o dată prin materia de Analiză matematică, așa cum este ea prezentată în manualele de clasa a XI-a și a XII-a, a putut observa faptul că, în această disciplină matematică, inegalitățile intervin în mai toate chestiunile fundamentale. Noțiunile de convergență, limită, continuitate și integrabilitate sînt definite prin condiții care se exprimă cu ajutorul unor inegalități. Mai precis, am putea spune că aceste noțiuni au în vedere procese în care, în anumite condiții, din faptul că o anumită inegalitate are loc rezultă că o altă inegalitate are și ea loc. Să luăm, de exemplu,

noțiunea de convergență. Șirul x_n converge către x dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural N astfel încît din faptul că $n > N$ să rezulte că $|x_n - x| < \varepsilon$.

O întrebare care apare imediat în legătură cu această formulare se referă la natura celor trei inegalități pe care ea le cuprinde. Pot fi ele înlocuite cu inegalitatea slabă, care admite și eventualitatea egalității? Cu alte cuvinte, putem înlocui $>$ prin $\geqslant$? Este foarte important să cunoaștem răspunsul la chestiuni de acest fel, deoarece raționamentele de Analiză matematică ne pun de multe ori în fața unor formulări care diferă de cele standard fie prin notație, fie prin anumite modificări. În limbajul matematic se întîmplă ca și în limbajul uzual. Schimbarea unui singur semn poate să modifice radical semnificația unei expresii, după cum, alteori, o schimbare a unui mare număr de semne poate să nu modifice cu nimic semnificația de ansamblu (de exemplu, formularea de mai sus a definiției noțiunii de convergență este perfect echivalentă cu formularea: Șirul x_n converge către x dacă oricărei vecinătăți V a lui zero îi corespunde o vecinătate W a lui $+\infty$ cu proprietatea că, de îndată ce n aparține lui W, expresia $|x_n - x|$ aparține lui V). De exemplu, cuvintele *dur* și *dor* diferă numai printr-o literă, dar au semnificații complet diferite, în timp ce *ocazie* și *prilej* sînt complet diferite, dar au aceeași semnificație. În mod similar, în matematică, o modificare ușoară are uneori consecințe importante, alteori conduce la o formulare echivalentă cu cea inițială. Astfel, în raport cu formularea definiției convergenței cu ajutorul unor inegalități, o serie de formulări diferite apar destul de frecvent. Ele constau în înlocuirea uneia sau mai multor inegalități stricte prin inegalități slabe. Se obțin astfel opt situații distincte și anume: 1) $\varepsilon > 0$, $n > N$, $|x_n - x| < \varepsilon$; 2) $\varepsilon \geqslant 0$, $n > N$, $|x_n - x| < \varepsilon$; 3) $\varepsilon > 0$, $n \geqslant N$, $|x_n - x| < \varepsilon$; 4) $\varepsilon \geqslant 0$, $n \geqslant N$, $|x_n - x| < \varepsilon$; 5) $\varepsilon > 0$, $n > N$, $|x_n - x| \leqslant \varepsilon$; 6) $\varepsilon > 0$, $n \geqslant N$, $|x_n - x| \leqslant \varepsilon$; 7) $\varepsilon \geqslant 0$, $n > N$, $|x_n - x| \leqslant \varepsilon$; 8) $\varepsilon \geqslant 0$, $n \geqslant N$, $|x_n - x| \leqslant \varepsilon$. Se pune problema care dintre aceste variante sînt echivalente cu condiția de convergență a lui x_n către x și care nu. Nu este greu de văzut că, dintre cele opt variante, patru — și anume cele în care avem $\varepsilon > 0$ — sînt simple reformulări ale proprietății de convergență, în timp ce condițiile 2, 4, 7 și 8, în care avem $\varepsilon \geqslant 0$ conduc la proprietăți diferite. Variantele 2 și 4 conduc la condiții care nu pot fi satisfăcute de nici un șir, deoarece în cazul particular $\varepsilon = 0$ obținem inegalitatea imposibilă $|x_n - x| < 0$. Variantele 7 și 8 conduc la o proprietate satisfăcută exclusiv de șirurile

care, de la un anume termen mai departe, sînt staționare, cu alte cuvinte pentru n destul de mare avem tot timpul $x_n = x$.

Cititorul poate încerca, pe baza modelului de mai sus, să studieze probleme similare în ceea ce privește continuitatea și integrabilitatea. Astfel, definind continuitatea funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ în punctul $x_0 \in \mathbf{R}$ prin condiția: „Fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\delta > 0$ astfel încît dacă $|x - x_0| < \delta$ atunci $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$" putem imediat să ne întrebăm ce se întîmplă cînd, în locul inegalităților stricte, folosim inegalități slabe. Nu este greu de văzut că, în timp ce inegalitatea $\varepsilon > 0$ nu poate fi înlocuită cu $\varepsilon \geqslant 0$, nici $\delta > 0$ prin $\delta \geqslant 0$, celelalte două inegalități pot fi înlocuite prin $|x - x_0| \leqslant \delta$ și, respectiv, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$, noua formulare fiind perfect echivalentă cu aceea care definește continuitatea. În legătură cu definiția integrabilității (f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă există I astfel încît pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ și orice valori ξ_i din intervalele $[x_i, x_{i+1}]$ ale diviziunii Δ are loc următoarea proprietate: oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît de îndată ce $\|\Delta\| < \delta$, avem $|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon$), cititorii pot încerca să arate că orice versiune în care în loc de $\varepsilon > 0$ punem $\varepsilon \geqslant 0$ sau în loc de $\delta > 0$ punem $\delta \geqslant 0$ conduce la o formulare care nu mai este echivalentă cu aceea a integrabilității. În schimb, dacă în loc de $\|\Delta\| < \delta$ punem $\|\Delta\| \leqslant \delta$ sau/și în loc de $|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon$ punem $|\sigma_\Delta(f) - I| \leqslant \varepsilon$, atunci formularea astfel obținută este echivalentă cu aceea a integrabilității Riemann.

O altă modificare ce apare în mod frecvent este aceea a înlocuirii lui ε prin $\varepsilon/2$ sau prin $\varepsilon/3$ sau, în sfîrșit, prin produsul dintre $\varepsilon > 0$ și un anumit număr real, strict pozitiv. Orice modificare de acest tip lasă nealterate noțiunile de convergență, continuitate și integrabilitate. Faptul se bazează pe o observație simplă, dar importantă: Dacă ε este un număr pozitiv arbitrar, atunci $a\varepsilon$ (cu $a > 0$) este de asemenea un număr pozitiv arbitrar. În această ordine de idei, să mai observăm că raționamentele de analiză matematică se prevalează de multe ori și de faptul că suma și produsul a două numere pozitive arbitrare sînt numere pozitive arbitrare.

O altă problemă importantă în activitatea practică de analiză matematică se referă la modul în care este negată o proprietate care se exprimă cu ajutorul unor inegalități. Negația intervine în orice raționament prin reducere la absurd, raționament foarte frecvent în Analiză. Capcana pe care o prezintă aici negația este dublă, deoarece proprietățile

de analiză care implică inegalități cuprind de obicei și unele expresii în modul, iar negația unei inegalități cu modul pretinde uneori scrierea inegalității cu modul sub forma a două inegalități fără modul. O situație semnificativă din acest punct de vedere apare în legătură cu proprietatea de mărginire a unui șir (x_n), definită prin existența unui număr A astfel încît $|x_n| < A$ oricare ar fi n natural. Pentru a demonstra prin reducere la absurd că un șir este mărginit trebuie să presupunem că el nu este mărginit, deci să negăm proprietatea de mărginire. Aceasta se face astfel: Oricare ar fi numărul pozitiv A, există n pentru care $|x_n| \geqslant A$. Însă aici este de obicei comod să desfacem inegalitatea cu modul în două inegalități fără modul: $x_n \geqslant A$ sau $x_n \leqslant -A$. Fiecare dintre aceste două posibilități trebuie considerată separat. Un exemplu de exercițiu care face apel la un raționament de acest tip este următorul: Să se arate că orice șir de numere reale conține un subșir care are limită (finită sau infinită).

TEORIA ȘI PRACTICA SĂ SE CHEME UNA PE ALTA!

Caracterul predominant practic al chestiunilor de matematică propuse la diferite concursuri și examene are desigur avantajul de a orienta pregătirea candidaților spre o matematică în acțiune, o matematică în sprijinul rezolvării concrete a unor probleme. Mai e apoi avantajul stimulării inițiativei personale a candidaților. În cele mai multe cazuri, o problemă concretă nu se rezolvă prin simpla aplicare a unei rețete gata făcute; este necesară, dacă nu o idee, cel puțin o articulare specifică a unor „prefabricate" matematice. Nu putem însă trece cu vederea o anumită primejdie care pîndește orientarea pregătirii candidaților aproape exclusiv spre aspectele practice. Această primejdie apare ori de cîte ori rezolvarea problemelor eludează baza ei teoretică. În locul unei referiri explicite la definițiile conceptelor și enunțurile rezultatelor folosite, la ideea diriguitoare a strategiei de rezolvare, se preferă aplicarea succesivă a unor trucuri și formule de rutină. Prin aceasta, nu numai că se știrbește funcția de cunoaștere a matematicii, dar se sabotează buna pregătire matematică. Nimeni nu va fi convins de importanța conceptelor și teoremelor matematice atîta vreme cît va constata că rezolvarea problemelor practice nu are nevoie de aceste concepte și teoreme. Numai o legătură organică între teoria și practica matematică le poate face cu adevărat

inteligibile și convingătoare. Să urmărim aceste aspecte prin intermediul unor chestiuni propuse la unele examene din toamna 1983.

VALORIFICAREA TEOREMELOR

Fie funcția $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ dacă $x > 0$ și $f(0) = e$. Să se studieze continuitatea funcției f pe $[0, 1]$ și să se arate că integrala ei pe acest interval este inferioară numărului e.

Să observăm mai întîi că funcția f este definită, pentru x mai mare decît zero, printr-o expresie de forma u la puterea v, unde u și v sînt funcții de x, iar u este pozitivă. Sînt exact condițiile în care a fost studiată această funcție în manual, stabilindu-se continuitatea ei în orice punct în care u și v sînt continue. În acest fel tranșăm chestiunea continuității funcției f în orice x pozitiv. Rămîne acum să vedem ce se întîmplă în origine.

Orice problemă relativă la continuitate ne cere să alegem acea variantă a continuității care s-ar putea dovedi mai potrivită problemei considerate. După cum se știe (a se vedea teorema de caracterizare a continuității într-un punct, din manualul de Analiză matematică pentru clasa a XI-a), există cel puțin trei variante echivalente: cu vecinătăți, cu șiruri și cu epsilon-delta. Este greu de dat o rețetă pentru o alegere optimă între aceste variante care, deși logic echivalente, pot fi diferite din punctul de vedere al gradului lor de comoditate într-o problemă sau alta. Să observăm însă că, în baza teoremei de caracterizare a limitelor de șiruri din manualul de clasa a XI-a, varianta cu șiruri revine în ultimă instanță fie la o formulare care implică vecinătățile, fie la una în limbaj epsilon-delta. În același timp însă, dispunem de unele „prefabricate" prețioase, cum rezultă din paragraful 4 (Calculul limitelor de șiruri) și din paragraful 5 (Calculul limitelor de funcții), capitolul al doilea al manualului, care ne scutesc să mergem de fiecare dată la sursă, adică la definiție, în una sau alta din versiunile ei. Un astfel de prefabricat util în problema noastră este rezultatul pe care-l găsim în capitolul al doilea al manualului, paragraful al cincilea (pagina 109 în ediția 1980), relația (42): Limita pentru y tinzînd către zero din puterea de exponent $1/y$ a binomului $1 + y$ este egală cu numărul e. Observăm că printr-o simplă schimbare de notație (înlocuirea lui y cu x)

și ținînd seamă de faptul că $f(0) = e$, relația (42) din capitolul al doilea al manualului conduce la continuitatea funcției f în origine.

Desigur, cititorul s-ar putea sperla la gîndul că trebuie să țină minte atîtea relații stabilite în manual și s-o aleagă pe cea mai potrivită în împrejurarea în care se află. Lucrurile sînt însă mai puțin complicate decît par la prima vedere. Relația (42) este un alt mod de a scrie relația (41), după care puterea de exponent x a binomului $1 + 1/x$ are ca limită numărul e atunci cînd x tinde la plus infinit. La rîndul ei relația (41) este o consecință a definiției II.7 (de la pagina 96) a număruiui e ca limită, pentru n tinzînd la infinit, din puterea a n-a a binomului $1 + 1/n$. Aceste deducții nu trebuie memorate, ci restabilite de fiecare dată, pe baza definiției numărului e, baza logaritmilor naturali, definiție care trebuie desigur să fie cunoscută. Nu e mai puțin adevărat că, prin aplicarea lor repetată, aceste aspecte diferite ale numărului e se și memorează. Dar memorarea nu poate ține loc de argumentare. Astfel, este util ca cititorul să verifice că poate reconstitui etapele prin care relația (41) este obținută din definiția numărului e, fapt care ține de o clasă mai generală de situații, în care trecem de la comportamentul unui șir la acela al unei funcții definite pe un interval sau invers, de la cel din urmă la cel dintîi.

Din continuitatea lui f rezultă, în baza unei teoreme din manualul de clasa a XII-a, că f este integrabilă pe $[0, 1]$. Tot în clasa a XII-a s-a învățat teorema de medie pentru integrale, după care integrala lui f pe $[a, b]$ este inferioară produsului dintre $b - a$ și orice majorantă a lui f pe $[a, b]$ sau egală cu acest produs. Se poate însă arăta că cea mai mică dintre aceste majorante este chiar numărul e. (Funcția f este descrescătoare pe $[0, 1]$, iar maximul ei este atins numai în origine). Deoarece intervalul $[a, b]$ este la noi intervalul $[0, 1]$, avem $b - a = 1 - 0 = 1$, deci $e(b - a) = e$. Rezultă astfel relația cerută în enunț? Pe baza teoremei de medie invocate ar rezulta că integrala este mai mică *sau egală* cu e. Cum înlăturăm posibilitatea egalității? Este suficient să observăm că funcția f este *strict* descrescătoare și să urmărim comportamentul sumelor Riemann asociate.

Pentru care valori ale lui x are loc inegalitatea

$$\sin x + \cos 2x > 1?$$

Riscul, în tratarea unei astfel de probleme, este de a ne prevala de unele identităţi trigonometrice care, deşi corecte, sînt ineficiente în rezolvarea inegalităţii propuse sau conduc la rezultat pe o cale inutil de lungă. Astfel, deşi sinusul unui arc se poate exprima în funcţie de cosinusul dublului arcului, folosirea acestei posibilităţi nu este indicată aici, deoarece exprimarea respectivă se face cu ajutorul unui radical care ar complica lucrurile, chiar dacă în cele din urmă s-ar ajunge la soluţie. Dar apare naturală o altă idee, aceea de a exprima cosinusul dublului unui arc prin funcţiile trigonometrice ale acelui arc. Se ştie că $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, dar inegalitatea $\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x > 1$ nu pare mai simplă decît inegalitatea iniţială. Şi totuşi... Ne amintim de identitatea trigonometrică $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, cu ajutorul căreia inegalitatea noastră devine $\sin x - 2 \sin^2 x > 0$ sau $(1 - 2 \sin x) \sin x > 0$. Însă un produs de doi factori este pozitiv dacă şi numai dacă cei doi factori au acelaşi semn. Posibilitatea ca ambii factori să fie negativi este exclusă, deoarece ar însemna ca $\sin x$ să fie în acelaşi timp negativ, dar mai mare decît 1/2. Posibilitatea ca ambii factori să fie pozitivi se realizează de îndată ce $\sin x$ este pozitiv, dar inferior lui 1/2. Deci, limitîndu-ne la valori ale lui x cuprinse între 0 şi 2π, x trebuie să se afle cuprins fie între 0 şi $\pi/6$, fie între $5\pi/6$ şi π. Folosindu-se periodicitatea, se deduce uşor forma soluţiilor pe **R**.

O SUBSTITUŢIE ADECVATĂ

Să ne propunem acum să rezolvăm inegalitatea

$$x + \sqrt{x} \leqslant 6.$$

Desigur că într-o atare situaţie primul gînd este acela de a ne debarasa de radical. Se impune astfel substituţia $y = \sqrt{x}$, care conduce la inegalitatea $y^2 + y < 6$. Însă o atare operaţie trebuie făcută totdeauna cu grija de a nu se introduce soluţii străine şi de a nu se pierde unele dintre soluţii. Prezenţa radicalului în prima inegalitate ne atrage atenţia că trebuie să eliminăm din discuţie valorile negative ale lui x.

în ceea ce-l privește pe y, el este rădăcina pătrată *aritmetică* a lui x, deci este și el nenegativ. Inegalitatea în y este $y^2 + y - 6 \leqslant 0$. Zerourile trinomului din primul membru sînt -3 și 2, deci trinomul este negativ între $y = -3$ și $y = 2$. Însă, ținînd seamă de cele de mai sus, reținem numai intervalul $[0, 2]$, ceea ce conduce, pentru x, la valorile cuprinse între 0 și 4. Cu alte cuvinte, inegalitatea $x + \sqrt{x} \leqslant 6$ este satisfăcută exact atunci cînd x nu părăsește intervalul închis $[0, 4]$.

ATENȚIE LA LOGARITM!

Pentru care valori ale lui x are loc inegalitatea

$$\log_2(\log_{1/3} x) < 0?$$

Deoarece funcția logaritmică este definită numai pentru valori pozitive ale argumentului, avem $x > 0$ și $\log_{1/3} x > 0$, ceea ce conduce la inegalitățile $0 < x < 1$. Din faptul că logaritmul în baza 2 al expresiei din paranteză este negativ rezultă că $\log_{1/3} x < 1$. Însă logaritmul luat într-o bază subunitară este o funcție descrescătoare; deoarece $\log_{1/3} 1/3 = 1$, obținem $x > 1/3$. Rezultă că inegalitatea inițială are loc pentru $1/3 < x < 1$.

O INTEGRARE PRIN PĂRȚI ȘI UN ARTIFICIU

Să se calculeze: $\int_0^1 x \, ln(1 + x) \, dx$. Integrala are sens deoarece funcția de sub semnul integralei este continuă pe intervalul închis $[0, 1]$. Forma de produs a acestei funcții ne sugerează folosirea metodei de integrare prin părți. Să punem $f'(x) = x$, $g(x) = ln(1 + x)$. Avem, după teorema de integrare prin părți,

$$\int_0^1 f'(x) \, g(x) \, dx = f(x) \, g(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \, g'(x) \, dx,$$

deci

$$\int_0^1 x \cdot ln(1 + x) \, dx = \frac{1}{2} ln \, 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{1 + x} \quad (1).$$

Pentru evaluarea integralei din membrul al doilea am putea fi tentați să folosim o nouă integrare prin părți, deoarece sub integrală se află produsul dintre o funcție și derivata altei funcții. Putem concepe aceasta în două feluri: fie luînd ca funcție pe x^2 și ca derivată pe $1/(1+x)$, fie invers. Însă, ca și teorema de schimbare de variabilă, teorema de integrare prin părți poate fi aplicată corect, fără ca această aplicare să se dovedească eficientă. Am putea încerca să testăm această eficiență: nu trebuie să uităm că rostul integrării prin părți (ca și al schimbării de variabilă) este de a înlocui o integrală incomodă prin alta, mai comodă. Înainte însă de a ne angaja în acest test, ne tentează un mic artificiu, care s-ar putea să ne ducă mai repede la rezultat.
Avem

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-x^2\,dx}{1+x} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x^2)-1}{1+x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\right].$$

Avem

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x}\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx \text{ și } \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1.$$

Calculele care mai rămîn de făcut sînt elementare și rutinare: este inutil să le mai dezvoltăm. Simplificarea cu $1+x$ a fost posibilă datorită faptului că această expresie nu se anulează pe intervalul de integrare.

Dacă am fi aplicat integralei din membrul al doilea din (1) o nouă integrare prin părți, am fi eșuat. Într-adevăr, alegînd pe $x^2/2$ ca derivată și pe $1/(1+x)$ ca funcție, integrarea prin părți mărește cu o unitate valoarea exponentului de la numărător și tot cu o unitate valoarea exponentului binomului $1+x$ de la numitor și deci integrala, în loc să se simplifice, se complică. Alegînd pe x^2 ca funcție și pe $1/(1+x)$ ca derivată, nu facem decît să ne întoarcem la integrala din enunț, de la care am pornit. Se confirmă încă o dată că nu tot ceea ce este corect este și eficient.

O TEOREMĂ DE TIP L'HOSPITAL ȘI O PROBLEMĂ DE SIMETRIE

Să se calculeze: $\lim_{x\to 0} x \ln|x|$ și $\lim_{x\to 0} |x|^x$.

Este natural să ne întrebăm de la început de ce au fost asociate aceste două limite. Răspunsul vine imediat: funcția

$x \ln |x|$ se obține prin logaritmare, din funcția $|x|^x$. Va fi deci suficient să studiem prima limită pentru ca cea de a doua să fie dedusă imediat.

Să observăm însă că enunțul se bazează pe o presupoziție pe care nu o putem eluda. Se admite în mod tacit că cele două limite există, fapt care nu este deloc evident, deoarece prima funcție se prezintă sub forma unui produs dintre o funcție care tinde la zero și alta care tinde la infinit, iar a doua funcție este o putere în care atît baza cît și exponentul tind la zero. Însă, conform observației anterioare, va fi suficient să studiem limita primei funcții.

După cum se știe, în astfel de cazuri intră în acțiune teoreme de tip L'Hospital, specializate tocmai pentru aceste situații în care condițiile pentru aplicarea regulii „limita raportului a două funcții este egală cu raportul limitelor celor două funcții" nu sînt îndeplinite.

Produsul $x \ln |x|$ se poate scrie sub forma $f(x)/g(x)$, unde $f(x) = \ln |x|$ și $g(x) = 1/x$. Se observă că atît f cît și $|g|$ tind la infinit cînd x tinde la zero. Nici f, nici g nu sînt definite în origine, deci vom face apel la o teoremă de tip L'Hospital care nu cere funcțiilor să fie definite în punctul în care se studiază limita. Funcția g este, evident, definită și derivabilă în orice punct diferit de origine. Datorită faptului că logaritmul este luat nu din x, ci din modulul lui x, funcția f este și ea definită și derivabilă în orice punct diferit de origine. Derivata lui g este dată de $g'(x) = -1/x^2$, deci este diferită de zero peste tot unde există. Rămîne acum să studiem raportul dintre derivata lui f și aceea a lui g, raport care are sens în orice punct diferit de origine. Dacă limitele unilaterale în origine ale acestui raport există și sînt egale, atunci va exista și limita în origine a raportului dintre f și g și cele două limite vor fi egale.

Pentru $x < 0$ avem, conform teoremei de derivare a funcțiilor compuse (verificați legitimitatea folosirii aici a acestei teoreme), $f'(x) = (1/|x|)(-1) = (-1)/|x| = (-1)/(-x) = 1/x$. De asemenea, avem $g'(x) = -1/x^2$, deci $f'(x)/g'(x) = -x$ (simplificarea cu x este permisă, deoarece $x \neq 0$). Rezultă deci că limita la stînga, în origine, a raportului celor două derivate există și este egală cu zero. Conform teoremei lui L'Hospital, putem afirma că și limita la stînga în origine a raportului $f(x)/g(x)$ există și este egală cu zero.

Pentru $x > 0$ putem proceda în mod analog. Dar o observație simplă ne permite să stabilim că limita la dreapta în origine a raportului $f(x)/g(x)$ există și este egală cu zero.

Într-adevăr, raportul $h(x) = f(x)/g(x)$ este o funcție impară. Din faptul că, așa cum am arătat mai sus, limita la stînga în origine a funcției h există și este egală cu zero, rezultă imediat că există și limita la dreapta în origine a lui h și această limită este, de asemenea, egală cu zero:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} h(y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(-x) = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = 0.$$

Astfel de considerente de simetrie simplifică multe raționamente, dar din păcate ele trec de multe ori neobservate. Un principiu general guvernează orice raționament matematic: dacă ipotezele sînt simetrice în raport cu anumite argumente, atunci și concluziile trebuie să fie simetrice în raport cu acele argumente. Avem aici și un test de corectitudine: dacă, în pofida simetriei ipotezelor, concluziile nu prezintă o simetrie similară, înseamnă că undeva, în raționamentul nostru, s-a strecurat o greșeală.

Trecînd acum la cea de a doua limită care ni se cere, evident că ea există, iar valoarea ei este egală cu unitatea, deoarece logaritmul (în orice bază) unității este egal cu zero adică valoarea limitei evaluate mai sus.

Semnificația rezultatului obținut admite o interpretare de ordin mai general. Graficul funcției g este o hiperbolă echilateră, avînd drept asimptote chiar axele de coordonate. O ramură a hiperbolei se află în primul cadran, cealaltă ramură, simetrică primeia în raport cu originea axelor, se află în cadranul al treilea. Faptul că prima limită studiată este egală în origine cu zero admite deci și o interpretare frapantă în ceea ce privește limita la stînga în origine a raportului $f(x)/g(x)$, deoarece atît f cît și g admit ca limită la stînga în origine pe minus infinit. Dar logaritmul tinde mai încet la minus infinit decît $1/x$, fapt vizibil și pe graficul celor două funcții (pentru x negativ). Acest fenomen se asociază, în mod firesc, cu faptul bine cunoscut că, pentru x tinzînd la infinit, logaritmul lui x tinde la plus infinit mai încet decît x. Astfel de probleme privind viteza de creștere la infinit sînt foarte importante în matematica modernă și, cu deosebire, în tehnica de calcul, unde creșterea logaritmică este preferată celei polinomiale, iar aceasta din urmă celei exponențiale.

PROBLEME DE EXPRIMARE LA PROBELE DE MATEMATICĂ; O MENTALITATE PĂGUBITOARE

Este din păcate destul de răspîndită o anumită neglijență în folosirea limbii române la probele scrise și la cele orale de matematică.

Fenomenul se explică (dar nu se justifică) în mai multe feluri. Atent la corectitudinea calculului și a raționamentelor, candidatul nu-și mai supraveghează în egală măsură modul de exprimare. El are impresia că ceea ce contează este ce anume spune, nu și cum spune, fără să-și dea seama că între *ce* și *cum* există o legătură strînsă. Există apoi prejudecata profund dăunătoare după care folosirea atentă și corectă a limbii române ar fi importantă la disciplinele umaniste, nu și la cele științifice. Desigur, nimeni nu le spune elevilor acest lucru, dar el este implicit conținut în faptul că, de foarte multe ori, greșelile de gramatică sau de ortografie care apar în lucrările de matematică rămîn nepenalizate. Mai intervine și un alt fapt. Limbajul matematic are două componente, una aparținînd limbii naturale (în cazul nostru, limba română), cealaltă constînd în simboluri și formule. Unii cred în mod greșit că numai a doua componentă exprimă cu adevărat limbajul matematic, prima fiind neesențială și putînd chiar lipsi. Această mentalitate poate fi observată la orele de matematică din școli și la cursurile de matematică din facultăți. Atîta vreme cît profesorul face calcule la tablă, cei care-l ascultă le transcriu cu fidelitate în caietele lor; de îndată însă ce profesorul se oprește din scris, dezvoltînd unele considerații orale, cei din bănci încetează și ei de a mai scrie. Rezultatul? Elevii și studenții ratează unele aspecte delicate ale raționamentului, nu mai sînt preveniți asupra unor posibile confuzii, nu mai sînt ajutați în sesizarea unor motivații privind diferite concepte sau teoreme, în înțelegerea ideii care stă la baza unei demonstrații mai complicate.

EXPLICAREA CONCEPTELOR MATEMATICE SE BAZEAZĂ PE LIMBA NATURALĂ

Să ne referim, pentru a ilustra cele de mai sus, la noțiunea de limită a unei funcții într-un punct. Formal, este suficient să spunem că dacă a aparține intervalului deschis I al dreptei reale și dacă funcția reală f este definită pe $I - \{a\}$, atunci A este limita lui f în a dacă pentru orice șir (x_n) din

$I - \{a\}$ care tinde la a, şirul $f(x_n)$ are ca limită pe A. Lucrul acesta se poate exprima într-un mod mai laconic astfel: Din $x_n \in I - \{a\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Dacă însă rămînem numai la acest enunţ, definiţia rămîne corectă, fără a-şi trăda *de ce*-ul ei, fără a se înţelege importanţa fiecărui detaliu din enunţul menţionat. Pentru ca aceste chestiuni să fie clarificate, este necesar un comentariu, iar acest comentariu nu mai este exprimat în formule, ci în limba pe care o folosim în fiecare zi. Un prim comentariu se referă la faptul că noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct îşi propune să descrie comportamentul funcţiei în vecinătatea *redusă* a acestui punct, adică în vecinătăţi ale lui a din *care s-a exclus punctul* a. Este deci esenţial ca x să evite valoarea lui a. Din păcate, faptul acesta a rămas nesesizat de mulţi candidaţi la un examen ţinut în 1982, la care una dintre chestiuni la proba scrisă era compararea diferitelor variante ale definiţiei limitei unei funcţii într-un punct. În schimb, mulţi candidaţi au crezut că esenţial în definiţia de mai sus nu este faptul că x_n diferă de a, ci faptul că valoarea A a limitei nu e obligată să fie egală cu $f(a)$. Nu s-a observat că această libertate devine iluzorie atîta timp cît nu se interzice egalitatea $x_n = a$, care între altele ar obliga funcţia f să fie definită în punctul a; mai mult, de îndată ce această egalitate se materializează pentru orice n suficient de mare, nu-i rămîne valorii A decît o singură şansă: aceea de a fi egală cu $f(a)$. Dar prin aceasta funcţiei f i se impune continuitatea în a. Realizăm astfel că o formulare ca: *Dacă* x *tinde către* a, *atunci* $f(x)$ *tinde către* A, nu corespunde definiţiei noţiunii de limită în a, ci definiţiei continuităţii în a.

DEMONSTRAŢIILE AU NEVOIE ŞI DE „PROZĂ", NU NUMAI DE CALCULE

Am desfăşurat toate aceste detalii, pentru a arăta pe un caz concret că introducerea unui concept matematic nu se poate dispensa de folosirea limbii naturale, în cazul nostru a limbii române. Un alt aspect semnificativ este modul în care anumite părţi ale argumentării, în cadrul unei demonstraţii matematice, au nevoie de „proză", nu de calcule. Din atîtea exemple cîte se pot alege, să ne referim, în cele ce urmează, la demonstraţia teoremei lui Rolle, din care aflăm că dacă o funcţie reală f este definită şi continuă pe un interval închis şi mărginit $[a, b]$, dacă f este derivabilă pe inter-

valul deschis (a, b) și dacă $f(a) = f(b)$, atunci există un punct strict cuprins între a și b în care derivata lui f se anulează. Demonstrația acestei teoreme nu comportă nici un calcul, ea este aproape exclusiv de natură logică și calitativă. Mai întîi însă trebuie să observăm că orice demonstrație are la bază o idee: fără sesizarea ei, memoria se aglomerează cu detalii care altfel ar decurge în mod firesc, iar înțelegerea faptelor este compromisă, ca în cunoscuta infirmitate a celui care vede copacii, dar nu vede pădurea. Ideea de bază, în demonstrarea teoremei lui Rolle, este folosirea teoremei lui Fermat, din care aflăm că dacă o funcție f are derivată într-un punct de extrem din interiorul unui interval I, atunci derivata lui f se anulează în punctul respectiv. După cum se vede, degajarea ideii de bază nu se exprimă în formule, ci în cuvinte. În al doilea rînd, chiar desfășurarea detaliilor demonstrației teoremei lui Rolle este calitativă, nu calculatorie. Nu vom desfășura aici aceste detalii, care sînt bine cunoscute din manual. Vom observa numai faptul că, pentru a ne convinge de înțelegerea demonstrației (și a teoremei) putem folosi următorul test: Sîntem capabili să explicăm unde și în ce fel intervine, în demonstrație, fiecare dintre ipoteze? Sîntem capabili să dăm exemple adecvate din care să rezulte rolul esențial al unor ipoteze în enunțul unei teoreme? În urmă cu ani a apărut în traducere românească o carte intitulată *Contraexemple în Analiză* (de B. R. Gelbaum și J. M. H. Olmsted), care-și propunea prezentarea sistematică a unor exemple de acest fel. În legătură cu teorema lui Rolle, este desigur important să se poată arăta unde intervine calitatea intervalului de a fi închis și mărginit (răspuns: în folosirea teoremei după care o funcție continuă pe un astfel de interval este mărginită și își atinge marginile) și să se dea un exemplu care să arate că fără această ipoteză teorema nu mai funcționează (de exemplu, funcția $f(x) = x$ pentru $0 \leqslant x < 1$, $f(1) = 0$, este continuă și derivabilă pe intervalul $(0, 1)$, *satisface egalitatea* $f(0) = f(1)$, dar derivata este identic egală cu unitatea pe $(0, 1)$, deci nu există un punct în care derivata se anulează).

CARENȚE GRAMATICALE ȘI DE ORTOGRAFIE

Voi enumera acum o serie de greșeli de gramatică și de ortografie pe care le-am întîlnit în lucrări ale unor candidați la admitere, uneori în lucrări merituoase din punct de vedere matematic. Trebuie însă să spun că, de cele mai multe ori,

aceste greşeli făceau casă bună cu greşelile de natură logică. Este de aşteptat să fie aşa. Omul gîndeşte prin intermediul limbii sale materne; folosim limbajul nu numai pentru a ne articula cuvintele, ci şi pentru a ne articula gîndurile, ideile.

O greşeală foarte răspîndită este folosirea lui *care* în loc de *pe care: teorema care am demonstrat-o, problema care-am dat-o acasă*, iată expresii din păcate foarte frecvente în lucrările candidaţilor.

Abundă greşeli de toate tipurile: *acelaş* (în loc de *acelaşi*); *secment* (în loc de *segment*); *divizori propri* (în loc de *proprii*), *noştrii* (în loc de *noştri*); *valuarea* (în loc de *valoarea*); *dintr-e* (în loc de *dintre*); *dintro* (în loc de *dintr-o*); *mediea* (în loc de *media*); *ecuaţiea* (în loc de *ecuaţia*); *congruiente* (în loc de *congruente*).

Sînt frecvente dezacordurile gramaticale: *funcţii continui* (în loc de *continue*); *succesiune de numere scrise una după alta* (în loc de *unul după altul*); *aceeaşi bază* (în loc de *aceeaşi bază*). În schimb, se face acordul acolo unde nu trebuie: *trebuiesc demonstrate* în loc de *trebuie demonstrate*.

Frecvente sînt şi anacoluturile: *Aceste proprietăţi sînt asemănătoare ca la limite de şiruri*; *Continuitatea unei funcţii într-un punct este atunci cînd...*

Supărătoare sînt şi cacofoniile: *să urmărească ca*; *caracteristica cantitativă*; *implică că*.

Apar apoi exprimări necorecte ale unor entităţi matematice: *intervalul zero şi unu* (în loc de *intervalul zero, unu*). Pleonasme: *un triplet de trei numere* (în loc de un *triplet de numere* sau un *sistem de trei numere*).

Dacă astfel de neglijenţe apar în lucrările scrise, mult mai numeroase şi mai variate sînt greşelile în exprimarea orală. O primă măsură de prudenţă, în prezentarea orală a unui fapt matematic, este evitarea frazelor lungi. Să despărţim în două sau în trei fraze scurte ceea ce am fi tentaţi să spunem într-o singură frază. Avem în vedere în primul rînd definiţiile conceptelor şi enunţurile teoremelor. Exprimîndu-ne în fraze lungi, putem uita prima parte a frazei atunci cînd ne aflăm în partea a doua a ei; calea este astfel deschisă spre anacoluturi şi spre dezacorduri gramaticale. Un candidat care a avut ambiţia de a epuiza într-o singură frază enunţul teoremei creşterilor finite a ajuns la următoarea formulare: „O funcţie f este definită şi continuă pe intervalul închis şi mărginit pe $[a, b]$, derivabilă pe intervalul deschis (a, b) şi satisface relaţia $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ $(a < c < b)$". În primul rînd se observă aici ignorarea structurii logice a

oricărei teoreme, structură care constă într-o implicație: din A rezultă B. Aici, A este ansamblul ipotezelor, B este concluzia. În formularea propusă de candidatul nostru nu se face nici o demarcație între ipoteză și concluzie, sau, mai bine zis, se face, dar în mod greșit, ca și cum ipoteza ar fi că f este o funcție iar concluzia ar fi că f are toate proprietățile specificate (continuitate, derivabilitate, egalitatea menționată). În al doilea rînd, formularea este ambiguă, nefiind clar dacă se afirmă existența unei valori c care satisface egalitatea menționată sau validitatea acestei egalități pentru orice valoare a lui c cuprinsă între a și b. O formulare corectă trebuie să separe net satisfacerea concluziei (existența unei valori c care satisface egalitatea menționată) de satisfacerea ipotezei (constînd din două părți: continuitatea lui f pe $[a, b]$ și derivabilitatea lui f pe (a, b).

SĂ NE AMINTIM DE URMUZ

L-ați citit pe Urmuz? A trăit între 1883 și 1923. A scris foarte puțin, dar a marcat literatura română prin pagini de o puternică singularitate. Urmuz este unul dintre precursorii literaturii absurdului, despre care s-a vorbit mult în ultimele decenii. Iată un fragment urmuzian, dintr-un text intitulat *Pîlnia și Stamate*, pe care-l reproduce și comentează G. Călinescu în Cursul său de poezie:

„Un apartament bine aerisit, compus din trei încăperi principale, avînd terasă cu giamlîc și sonerie.

În față, salonul somptuos, al cărui perete din fund este ocupat de o bibliotecă de stejar masiv, totdeauna strîns înfășurată în cearceafuri ude... O masă fără picioare, la mijloc, bazată pe calcule și probabilități, suportă un vas ce conține esența eternă a „lucrului în sine", un cățel de usturoi, o statuetă ce reprezintă un popă (ardelenesc) ținînd în mînă o sintaxă și...20 de bani bacșiș... Restul nu prezintă nici o importanță".

După cum se vede, textul începe în mod normal. Nimic nu anunță, în prima frază, anomaliile semantice care urmează numai cîteva rînduri mai jos. „Deraierea" se produce pe neașteptate; însă odată produsă, se propagă în lanț. Nu avem timp să ne revenim din uluirea stîrnită de cearceafurile ude care înfășoară biblioteca de stejar masiv și ne trezim în fața unor incongruități: o masă fără picioare, un vas conținînd esența lucrului în sine etc. Numai că aceste incompatibilități semantice, aceste absurdități constituie la

Urmuz rezultatul unui act deliberat. Urmuz este un iconoclast, un insurgent care, prin textele ironice și polemice la adresa genurilor literare constituite, atrăgea atenția că literatura are nevoie de o schimbare.

URMUZ LA EXAMENUL DE ADMITERE

Ne-am amintit de Urmuz și de textele sale construite pe alunecarea în absurd, citind unele lucrări ale candidaților la examenul de admitere în învățământul superior, din iulie 1984. Numai că, în timp ce la Urmuz alunecarea în absurd este deliberată și manipulată în scopuri literare, în lucrările unor candidați la admitere absurdul este efectul involuntar al unei slabe pregătiri, al incapacității de a ține sub control limbajul, fie el cel natural sau cel matematic. Nu avem intenția, acum și aici, să prezentăm, cum am făcut altă dată, soluțiile corecte ale unor probleme propuse candidaților. Ne interesează un fenomen de natură mai generală, care, prin frecvența sa, constituie o problemă gravă, pentru că, dincolo de procesul de acumulare a unor cunoștințe și de pregătire a unei anumite materii de specialitate, este pus în chestiune chiar modul de folosire a gîndirii și a limbajului. Să nu uităm că dobîndirea unor cunoștințe este numai una și nici măcar cea mai importantă dintre componentele pregătirii unui candidat. Examenul de admitere își propune să testeze și să aprecieze în primul rînd măsura în care candidații sînt capabili să reacționeze în situații inedite, prin folosirea adecvată a noțiunilor, metodelor și rezultatelor conținute în programa școlară. Ca și limbajul natural, limbajul științific în general, limbajul matematic în particular se supun la o serie de reguli care trebuie cunoscute. Formalismul matematic, deosebit de riguros în structura sa internă, poate ușor deraia în nonsens și în absurd, dacă pierdem controlul asupra regulilor care-l guvernează și ne lăsăm exclusiv atrași de tendințele sale ludice. Desigur, orice formalism matematic poate constitui punctul de plecare al unui joc, dacă uităm problema care a condus la acel formalism și la care formalismul trebuie să se întoarcă. Este ca și cum silabele românești, în loc să fie folosite pentru alcătuirea unor cuvinte și fraze cu înțeles, ar fi combinate după tot felul de alte reguli, sau pur și simplu după nici o regulă. Astfel de experimente se fac uneori, de către poeți de exemplu, pentru a se urmări anumite capacități și efecte combinatorii. De asemenea, unele jocuri de cuvinte, în rebus și, în general,

în enigmistică exploatează virtuți pur combinatorii ale limbajului. Dar chiar și în aceste cazuri procedeul trebuie ținut sub control, deoarece o absență totală de reguli nu poate fi concepută. Cînd este vorba însă de folosirea unui anumit formalism pentru rezolvarea unei probleme precise, fiecare etapă trebuie raportată la scopul urmărit: formalismul nu poate deveni nici un moment un scop în sine.

LIMBAJUL TREBUIE ȚINUT SUB CONTROL

Formalismul este, de fapt, gîndire condensată, formalismul matematic exprimă entități și raționamente care, traduse în cuvinte, ar conduce la șiruri lungi de fraze pe care cu greu le-am putea urmări și înțelege, deoarece ar depăși capacitatea noastră de atenție și memorie. Diluarea gîndirii logice în mediul limbii naturale destinate cu precădere comunicării spontane atrage cu sine o obscurizare a ideilor și silogismelor. Dimpotrivă, trecerea de la cuvinte la simboluri și formule implică o creștere a concentrării expresiei, o gîndire mai densă și mai clară. Pentru a ne exprima într-un mod mai sugestiv am putea spune că, în medie, mai multă gîndire logică se află pe un centimetru de formule matematice decît pe un centimetru de cuvinte. Aceasta înseamnă că și controlul pe care-l pretinde din partea noastră manipularea formalismului matematic nu poate fi cu nimic inferior controlului pe care trebuie să-l exercităm asupra modului în care folosim, în general, limbajul (în primul rînd limbajul articulat, care pentru noi revine la limba română); dimpotrivă, este nevoie chiar de o mărire a acestui control, de mai multă vigilență. Acest spor de atenție este cerut nu numai de faptul că limbajul matematic prezintă o densitate mai mare decît limbajul cotidian, ci și pentru faptul că el ne este mai puțin familiar decît acesta din urmă. Folosim limba maternă în mare măsură în mod spontan; corectitudinea în exprimare, proprietatea termenilor, respectarea regulilor gramaticale și ortografice trebuie să intre în reflexele noastre curente, mai cu seamă cînd este vorba de exprimarea orală, unde nici nu avem la dispoziție prea mult timp pentru a reflecta cum anume să ne exprimăm. Dacă însă este vorba de forma scrisă de exprimare, așa cum se întîmplă la cele mai multe probe la examenul de admitere în învățămîntul superior, atunci nici o scăpare nu este permisă. Limbajul familiar trebuie să facă loc în întregime limbajului îngrijit, al culturii. Posibilitatea de a revedea textul și de a-l îndrepta trebuie

folosită la maximum. Este inadmisibil să întîlnim, într-o lucrare scrisă a unui absolvent care abia a trecut examenul de bacalaureat, exprimări ca *giometric* (în loc de *geometric*), *abele* (în loc de *ambele*), *funția* (în loc de *funcția*), *alcătuesc* (în loc de *alcătuiesc*), *propiu-zis* (în loc de *propriu-zis*), *mulțimia* (în loc de *mulțimea*), *asimtotă* (în loc de *asimptotă*), *funcții continui* (în loc de *funcții continue*), *funcțiile sînt continui, deci sînt atît integrabile cît și admit primitive* (în loc de *fiind continue, funcțiile sînt integrabile și admit primitive*). Din păcate, aceste exemple (ca și multe altele similare, pe care nu le mai reproducem aici) sînt extrase din lucrările candidaților la admiterea din iulie 1984.

CÎND LIMBAJUL MATEMATIC DERAIAZĂ

Putem, într-adevăr, asemăna limbajul matematic cu un tren a cărui deplasare strict condiționată de menținerea sa pe șinele căii ferate corespunde unei funcționări riguros reglementate prin diferite definiții și convenții. De ce totuși deraiază uneori acest tren matematic? Vom urmări acest fenomen, făcînd radiografia cîtorva lucrări ale candidaților la admiterea din iulie 1984, la Facultatea de Matematică a Universității din București. Îi asigurăm însă pe cititori — și de altfel se vor convinge și singuri de acest lucru — că fenomenul discutat este general. Cititorul va putea transpune fără dificultate observațiile noastre în contextul altor probleme și situații, nu neapărat aparținînd matematicii.

Prima chestiune propusă candidaților (singura de altfel la care ne vom referi, deoarece varietatea de „deraieri" pe care ea le-a prilejuit în răspunsurile candidaților a depășit orice imaginație) a fost aceea de a se arăta că raportul dintre termenul de rang $n+1$ și termenul de rang n dintr-un șir (a_n) convergent către un număr a diferit de zero are ca limită pe unu atunci cînd n tinde la infinit. Iată răspunsul unui candidat: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3, \ldots$, $a_n = n$, $a_n = 1, 2, 3, \ldots, n$, $a_{n+1} = 1, 2, \ldots, n, n+1$, $\lim(a_{n+1}/a_n) = \lim(1, 2, 3, \ldots, n, n+1)/(1, 2, 3, \ldots, n)) = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty = 1$. Prin ipoteză $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a$, $a \in R$, $a \neq 0$; a_{n+1} se comportă la fel cu a_n, deci $\lim a_{n+1} = \lim a = a$. Atunci $\lim(a_{n+1}/a_n) = 1$.

Aici se încheie răspunsul candidatului şi începe comentariul nostru. Ca şi textul lui Urmuz, textul de faţă dă la început impresia de a fi normal. Am putea crede că problema este tatonată mai întîi pe un caz particular, şirul numerelor naturale. Alunecarea în nonsens se produce însă imediat. Ce să înţelegem din egalitatea $a_n = 1, 2, 3, \ldots, n$? Cu o anumită bunăvoinţă, am putea interpreta pe a_n ca termenul general al unui şir în care termenul de rang n este la rîndul său un şir finit, format din primele n numere naturale. Dar o atare interpretare este exclusă de egalitatea anterioară $a_n = n$. Să trecem peste această contradicţie şi să mergem mai departe. Ce sens am putea acorda raportului a două şiruri finite, altul decît acela pe care îl are, în general, raportul a două funcţii reale de o variabilă reală? În cazul nostru însă, este vorba de două funcţii cu domenii diferite de definiţie, prima fiind aplicaţia identică a mulţimii primelor n numere naturale, iar cea de a doua fiind aplicaţia identică a mulţimii primelor $n + 1$ numere naturale. În aceste condiţii, egalarea cu $n + 1$ a raportului considerat nu are nici o justificare: ea ar fi fost corectă dacă virgulele care separă termenii celor două şiruri ar fi fost înlocuite cu puncte sau cu simpla alăturare care desemnează operaţia de produs. Probabil că aceasta este chiar analogia pe baza căreia, în capul candidatului, s-a produs alunecarea urmuziană $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = n + 1$, urmată de enormitatea $\lim\limits_{n\to\infty} (n + 1) = 1$, motivată psihologic (dar nu şi logic) de dorinţa de a forţa lucrurile cu orice preţ, în vederea obţinerii rezultatului cerut. Dar autorul rîndurilor pe care le comentăm a simţit probabil că ceva nu este în ordine, deoarece, în ciuda „obţinerii" rezultatului cerut, a continuat consideraţiile sale printr-o schimbare totală a strategiei, reluînd totul de la capăt. De astă dată, absurdul este înlocuit cu cercul vicios: a folosi în argumentare faptul că „a_{n+1} se comportă la fel cu a_n" înseamnă a presupune exact ceea ce trebuie demonstrat, adică egalitatea dintre limitele lui a_n şi a_{n+1}.

ANALOGII NEFERICITE

Din păcate, situaţiile în care candidaţii folosesc unele analogii pur formale sau întîmplătoare pentru a dezvolta consideraţii lipsite de orice justificare sînt numeroase. Un candidat scrie: „$(a_{n+1}/a_n) = ((a_n + r)/a_n)$, r raţia; aplic regula lui Hospital". După un prim abuz, prin care a_{n+1} este echi-

valat cu $a_n + 1$, candidatul are impresia că este vorba de o progresie aritmetică; peste această enormitate se suprapune o a doua enormitate, constînd în înlocuirea lui 1 cu r (rația), pentru ca punctul culminant să-l constituie aici cea de a treia enormitate: aplicarea regulii lui Hospital (ca și cum ar fi vorba aici de raportul a două funcții derivabile: unde le-o fi văzut candidatul?).

Un alt candidat scrie: „$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ a.i. $\forall x > N_\varepsilon$ avem $a_n \to a$, $a \in \mathbf{R}$ număr real convergent $a \neq 0$". Textul începe normal, ca la Urmuz, dar deodată ne trezim în fața unui x, căzut din senin și dispărînd la fel de rapid în cele ce urmează. Probabil că intenția era de a se scrie n în loc de x; însă și în acest caz incoerența este la fel de mare, deoarece numărul pozitiv ε dispare din scenă înainte de a-și fi jucat rolul. În schimb, ni se spune despre limita șirului că este un „număr real convergent", alăturare de cuvinte care nu a primit încă vreo accepțiune în matematică. Misterul este astfel total.

Acest tip de incoerență, în care un fapt, adevărat sau fals, este invocat pentru a se justifica o afirmație care în realitate nu are nevoie de faptul invocat poate fi ilustrat și prin alte exemple. Un candidat scrie: „Conform teoremei că orice șir convergent este monoton, rezultă că și a_n este monoton și $\lim a_{n+1} = \lim a_n = a$". Teorema invocată aici există numai în capul nefericitului candidat; un șir ca $1, -1/2, +1/3, -1/4, \ldots, 1/2n = 1 - 1/2n,$ este convergent (către zero) fără a fi monoton. După ce conchide astfel în mod abuziv că (a_n) este monoton, candidatul afirmă egalitatea celor două limite, fără însă să ne arate cum anume rezultă ea din proprietatea de monotonie. Ne-am fi așteptat ca din această proprietate să se deducă faptul că, pentru orice n, a_{n+1} este cuprins între a_n și a, deci, deoarece a_n tinde către a, a_{n+1} tinde de asemenea către a. Dar, evident, egalitatea celor două limite are loc independent de orice proprietate de monotonie.

Cît de gravă poate fi deraierea provocată de o analogie superficială combinată cu o teoremă inexistentă (de tipul celeia cu monotonia, din exemplul anterior) se poate vedea și din următorul exemplu: „Se știe că limita cîtului a două polinoame este egală cu zero în cazul în care gradul numărătorului este egal cu gradul numitorului. În cazul nostru, pentru ca limita din a_{n+1}/a_n să fie egală cu 1 trebuie ca a_{n+1} și a_n să aibă același grad". Ce l-a putut face pe candidatul nostru să asimileze pe a_n cu un polinom? Desigur, a_n, ca număr real, este un polinom de gradul zero, dar nu acest

fapt l-a avut în vedere candidatul de vreme ce impune o condiție (care ar putea să fie sau să nu fie îndeplinită) gradelor polinoamelor a_n și a_{n+1}. Probabil că analogia a fost generată de prezența indicelui n, comună atît notației polinomiale cît și termenului general al unui șir. Este interesant faptul că, interpretați ca polinoame de gradul zero, termenii a_{n+1} și a_n au același grad, cum vrea candidatul; numai că, în acest caz, după logica sa, ar trebui ca limita raportului dintre a_{n+1} și a_n să fie egală nu cu unu ci cu zero, în contradicție cu realitatea. Noroc că „teorema" pe care candidatul o invocă este falsă, după cum se poate vedea pe exemplul polinoamelor $x + 1$ și $x + 2$. Ele au același grad, dar raportul lor nu tinde la zero nici cînd x tinde la zero, nici cînd x tinde la infinit.

SĂRMANA SINTAXĂ ȘI FOLOSIREA IMPROPRIE A UNOR NOTAȚII ȘI TERMENI

„Știm că $a_n \to a$, dar există o teoremă care ne spune că și șirul a_n la care se mai adaugă un număr finit de termeni tinde către același număr, deci și $a_{n+1} \to a$. Că a este limită a șirului a_n înseamnă că în orice vecinătate V a lui a se găsesc toți termenii cu excepția unui număr finit dintre ei". Să observăm mai întîi că relația dintre șirurile (a_n) și (a_{n+1}) $(n \geqslant 1)$ este prezentată aici exact pe dos față de cum se prezintă ea în realitate. Nu șirul (a_{n+1}) se obține din (a_n) prin adăugarea unui număr finit de termeni, ci (a_n) se obține din (a_{n+1}) prin adăugarea în față a lui a_1. În ce privește fraza următoare, marca ei de incultură ar fi putut fi evitată prin plasarea în față a cuvîntului *Faptul*.

O manifestare similară de exprimare incultă apare în cele ce urmează: „$\lim (a_{n+1}/a_n) = (\lim a_{n+1})/(\lim a_n)$. Această proprietate se poate folosi deoarece $\lim a_n = a \neq 0$. Proprietatea fiind următoarea: dacă a_n și b_n sînt două șiruri convergente și $\exists \lim a_n = a$ și $\exists \lim b_n = b$ și dacă $\lim b_n = b \neq 0$, atunci există și $\lim (a_n/b_n)$ și este egală cu a/b". După cum se vede, autorul s-a grăbit să folosească o proprietate înainte de a o specifica. Această situație l-a dus la fraza cu începutul imposibil: *Proprietatea fiind următoarea*. Normal ar fi fost să amintească mai întîi proprietatea respectivă și apoi s-o aplice.

Tentația extrapolării unor notații generează folosirea abuzivă, improprie, a unor simboluri matematice. De exem-

plu: „Dacă $n \to \infty$, atunci $a_\infty = \infty$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = \lim (a_{\infty+1}/a_\infty) = 1$". Abuzul se aliază aici cu incoerența. În prima parte, candidatul dorea probabil să afirme că $a_n \to \infty$ pentru $n \to \infty$, dar faptul acesta nu mai este folosit în continuare, unde se sugerează introducerea notației a_∞ pentru limita lui a_n; însă, în aceste condiții, ce mai caută *lim* în fața raportului $a_{\infty+1}/a_\infty$ și în ce fel s-a obținut egalitatea cu unitatea?

Improprietatea se extinde de la notații la termeni. Este impropriu să spunem *să rezolvăm integrala* sau *să calculăm asimptota* (corect: *să calculăm integrala* sau *să studiem integrala; să determinăm asimptota*).

Alteori, încălcarea ordinii firești de gîndire și exprimare ia forme și mai grave: „Dacă $m = n + 1$, poate fi aplicată această teoremă, deoarece $n \to \infty$ și $n > \eta_\varepsilon$. Teorema este teorema lui Cauchy. Teorema lui Cauchy spune că dacă avem un șir de numere convergent, atunci $(\forall)$ ε oarecare, oricît de mic și pozitiv, există $(a_n) > \eta_\varepsilon$, a.i. $(\forall)$ $m > n > \eta_\varepsilon$ să avem $|a_m - a_n| < \varepsilon$ cu $\varepsilon \to 0$". Este greu de spus ce trebuie penalizat mai întîi aici. Confuzia dintre η_ε și N_ε nu este gravă: în definitiv, nici o notație nu este obligatorie, ci pur convențională. Ambiguitatea unei expresii ca „oricît de mic și pozitiv" care sugerează absurdul *oricît de pozitiv*, putea fi evitată prin ordonarea *„pozitiv și oricît de mic"* Dar chiar și așa, expresia este inutil încărcată, deoarece posibilitatea de a-l alege pe ε *oricît de mic* rezultă din faptul că el *e oarecare*. Formularea teoremei lui Cauchy este în mare suferință: în loc de $(a_n) > \eta_\varepsilon$ trebuie „Nε astfel încît", iar condiția $\varepsilon \to 0$ de la sfîrșit nu are ce căuta; dar prezența ei este simptomatică pentru totala neînțelegere a mecanismului gîndirii epsilon. Nefirescul construcției de ansamblu rezultă din folosirea teoremei lui Cauchy înainte de a se ști că este vorba despre ea. Răsturnarea ordinii normale este însă aici în legătură strînsă cu faptul că autorul exprimării menționate nu a înțeles în ce constă teorema lui Cauchy.

Am derulat cele cîteva secvențe de mai sus pentru a se vedea cît de puternică este legătura dintre modul de gîndire și modul de exprimare. Frazele fără șir sînt simptomatice pentru neînțelegerea ideilor, după cum lipsa de claritate în gîndire este solidară cu lipsa de claritate în exprimare.

Această problemă este mai generală, privind toate disciplinele de învățămînt. Matematica este însă vizată în mod special, datorită unei lungi tradiții de separare a teoriei matematice de practica matematică și a didacticii matematice de cercetarea matematică.

Corelarea concomitentă a procesului de învățămînt atît cu cercetarea, cît și cu producția constituie o problemă mult mai complexă decît ar putea să pară la prima vedere. Nesesizarea acestei complexități duce uneori la deformări dăunătoare din punct de vedere instructiv-educativ. De fapt, cercetarea și producția prezintă o trăsătură comună, a cărei dezvoltare ar trebui să determine o fuzionare a lor. Și într-un caz și în celălalt, trebuie să reacționăm în mod adecvat la o situație inedită, la o situație care nu se mulțumește cu folosirea unor șabloane.

Comanda socială a momentului de față este atît de complexă și de nuanțată încît permite — și chiar cere — dezvoltarea unei game foarte variate de personalități. *Opțiunile tineretului nostru sînt în deplină concordanță cu cerințele pe care i le pune în față societatea,* dar aceste opțiuni trebuie cunoscute și examinate *în fiecare caz în parte.* Numai comoditatea noastră, a educatorilor, ar putea fi o frînă în această privință.

Ajungem astfel la problema centrală a procesului instructiv-educativ: cum formăm competențele pe care le reclamă revoluția tehnico-științifică, dezvoltînd în același timp, în rîndurile tineretului nostru, conștiința social-politică corespunzătoare? Cum putem obține, de la cei pe care-i formăm, randamentul maxim de care sînt ei capabili?

Forma supremă a activității noastre cu tinerii este îndrumarea personală, munca diferențiată și migăloasă cu fiecare dintre ei în parte, muncă în care avem posibilitatea să investim întreaga noastră profesionalitate, întreaga noastră personalitate culturală, politică și umană. Aceasta este, de altfel, munca cea mai dătătoare de satisfacții; ea șterge granițele dintre activitatea de cercetare și aceea de învățare sau de practică productivă, dintre aspectele profesionale și cele afectiv-umane. Întreaga personalitate a tînărului se modelează sub înrîurirea celui care-l formează cu atenție și răbdare, în lungi discuții și confruntări. Uneori neglijăm tocmai această latură esențială a activității lor. Este trist

ca după 10—15 sau 20 de ani de activitate un profesor să nu fi îndrumat primii paşi în profesiune, în cercetare aii nici unui student, să nu-şi fi format nici un discipol care să-i poarte amprenta şi care să-l întreacă tocmai pentru că-l continuă. Discuţiile cu absolvenţii din seriile mai vechi confirmă, toate, constatarea că lucrul cel mai de preţ cu care ei au rămas din anii petrecuţi în universitate sînt deprinderile căpătate în cadrul activităţilor care au rezultat dintr-o opţiune şi care le-au solicitat o anumită iniţiativă, stimulată de exemplul personal al celui care i-a îndrumat.

Numeroase alte probleme, în aparenţă diferite de aceea discutată mai sus, se înscriu de fapt în acelaşi context al calităţii muncii de îndrumare. Voi menţiona doar una dintre ele. Ea se referă la contractele de cercetare. Ne-am obişnuit să apreciem aceste contracte numai după valoarea lor în bani. Dar un contract încheiat de către o instituţie de învăţămînt sau de cercetare cu o unitate productivă, un contract care se vrea o expresie a integrării învăţămîntului cu cercetarea şi producţia ar trebui să aducă, în afară de bani, un spor de cunoaştere — care ar putea fi consemnat într-un articol ştiinţific —, precum şi un spor instructiv-educativ în ceea ce-i priveşte pe participanţii studenţi sau doctoranzi. Fără îndoială că multe contracte îndeplinesc aceste condiţii.

A CĂUTA ŞI A AFLA

Învăţămîntul din ţara noastră în general şi cel de matematici, în special, cunosc, în ultimii ani, o deosebită efervescenţă. Programele de învăţămînt au fost renovate prin renunţarea la multe cunoştinţe depăşite. S-au introdus noţiuni, idei şi fapte noi, promovate de dezvoltarea recentă a ştiinţei. A început un proces de modernizare a manualelor. S-au creat numeroase cercuri ştiinţifice şi s-au organizat sesiuni ştiinţifice, demonstrîndu-se prin exemple că este posibilă o activitate de cercetare la nivelul şcolii generale şi al liceului. Nu este mai puţin adevărat că uneori această cercetare este parodiată, prin înlocuirea iniţiativei personale cu o activitate de compilaţie a unor texte de obicei universitare, activitate în care snobismul se aliază cu falsul. Apar sute de reviste şcolare din care un ochi atent ar putea selecţiona multe talente ştiinţifice sau literar-artistice. Expoziţiile *Minitehnicus* mi-au prilejuit o adevărată desfătare

și admirație pentru spiritul de inventivitate, ingeniozitate și migală al copiilor.

Toate acestea le-am putut constata personal la liceele Gh. Coșbuc, N. Bălcescu, Spiru Haret, Gh. Șincai, Petru Groza din București, la liceele din Timișoara, Brașov, Ploiești și municipiul Gh. Gheorghiu-Dej și chiar la licee din localități mai mici, cum ar fi cel din comuna Drăgănești-Vlașca (județul Teleorman). Pretutindeni, în aceste locuri — și în multe altele, pe care le cunosc încă mai puțin — profesori inimoși și inteligenți dezvoltă cu pasiune o activitate de ridicare a învățămîntului nostru.

Sîntem deci în prezența unor dovezi peremptorii ale faptului că elevii sînt capabili de o activitate creatoare ori de cîte ori sînt puși într-o condiție favorabilă. Dar nu e mai puțin adevărat că numărul elevilor care realizează aceste performanțe este încă relativ mic. O întrebare deci se impune: *cum să facem ca numărul acestor elevi să fie din ce în ce mai mare?*

Mulți dintre cei mai buni diplomați universitari ai ultimilor ani au fost repartizați ca profesori în școli generale și licee. Ei vin cu un entuziasm molipsitor și cu priceperea de a-i atrage pe elevi în activități de descoperire, deoarece ei înșiși au fost antrenați în astfel de activități în anii petrecuți la universitate. Știința, tehnica și arta manifestă deopotrivă această generozitate, de a da posibilitatea unor căutări interesante la fiecare nivel de dezvoltare a lor. Ceva — dar ceva esențial — trebuie să se schimbe. O veche tradiție ne-a obișnuit cu un învățămînt al cărui ax este expunerea de la catedră. Cea mai mare parte a timpului pe care elevul îl petrecea în școală se consuma (în cel mai bun caz), cu înregistrarea pasivă a spuselor profesorului, iar acasă elevul făcea efortul de *a reține* aceste lucruri pentru lecția următoare. E adevărat că profesorul interpelează din cînd în cînd pe elevi și lucrează cu ei la tablă, dar de cele mai multe ori elevul restituie, cu această ocazie, raționamente gata făcute (de către alții). O integrare neformală a învățămîntului cu cercetarea și producția va fi realizată atunci cînd nu se va mai putea spune unde se termină învățămîntul și începe cercetarea, unde se termină aceasta din urmă și începe producția. Fără a se nega importanța lecțiilor cu caracter expozitiv, s-a apreciat că ponderea lor trebuie redusă, pentru a se putea acorda un loc mai mare activităților de îndrumare și control personal al fiecărui elev în parte; îndrumare și control ale elevilor mai slabi de către elevi mai buni și ale tuturor elevilor de către profesori. Numai antrenîndu-i pe elevi

zi de zi în activități care îi obligă nu să repete procedee deja elaborate (de către alții), ci să construiască ei procedee și soluții care răspund la situații inedite, numai obișnuindu-i să caute și să afle, îi pregătim să intre în profesie — și în viață — cu o zestre intelectuală și morală pe măsura exigențelor revoluției științifico-tehnice contemporane.

MANUALUL ȘCOLAR, O CARTE FUNDAMENTALĂ

Adolescența este recunoscută de psihologie ca o vîrstă de maximă receptivitate. Multe din experiențele de atunci ne-au marcat întreaga existență ulterioară. Orientarea noastră spre o anumită profesie, conștiința noastră cetățenească, modul de a ne forma o familie, de a ne alege prietenii, cărțile, de a ne organiza viața vin, în mare măsură, din imboldurile, din visurile, din bucuriile și din eșecurile de atunci, din deprinderile de gîndire și de acțiune formate atunci. Dar înțelegerea importanței acestei perioade o căpătăm, din păcate, mult mai tîrziu, cînd multe din drumurile pe care ne-am angajat sînt ireversibile.

Modul de a trăi adolescența nu este numai o problemă personală a fiecărui tînăr, ci și, în egală măsură, o problemă pe care societatea în ansamblul ei și-o pune și s-ar putea formula în felul următor: Cum să organizăm activitatea tinerilor, în așa fel încît, preluînd la timp tot ce este mai valoros în experiența dobîndită de generațiile anterioare, tinerii să se poată adapta cu minimum de dificultăți și cu maximum de randament la exigențele — civice, morale, intelectuale și profesionale — societății în care trăiesc? Oricît de mare ar fi influența exercitată asupra tinerilor de către familie, de către profesori, de către organizațiile de tineret, de întregul mediu social ambiant (inclusiv radioul, televiziunea, cinematograful, manifestațiile sportive), nu-i mai puțin sigur că multe din adevărurile și frumusețile acumulate de omenire se află depozitate în cărți, după cum tot prin litera tipărită sînt exprimate numeroase năzuințe privitoare la modul în care se configurează structura societății de mîine. Cărțile sînt, în mare măsură, memoria omenirii și tot prin ele ne exprimăm previziunile și speranțele noastre. Este deci firesc ca lecturile pe care le frecventăm să exercite o influență puternică asupra mentalității și concepțiilor noastre, asupra comportării noastre în societate.

Dar, alături de cărțile către care cineva se îndreaptă în funcție de posibilitățile, gusturile și înclinațiile sale (posibi-

lități, gusturi și înclinații care și ele sînt, în parte, social determinate), deci care diferă de la un tînăr la altul, societatea propune și un program de lectură și studiu comun pentru toți tinerii; este vorba de *manualele școlare.* Nici o carte nu poate rivaliza cu tirajul unui manual de română, de aritmetică sau de istoria patriei. Nici o altă carte nu e încărcată cu o mai mare răspundere socială decît un manual școlar. Deci, dacă în ceea ce privește cărțile preferate, cărțile de căpătîi, ele pot să fie cînd un roman de Sadoveanu, cînd o carte de experiențe de chimie sau una care relatează o expediție la Polul Nord, *cărțile fundamentale ale adolescenței ar trebui să fie în primul rînd manualele școlare.*

Am recitit recent o carte pasionantă, publicată în 1966: *Amintiri despre anii de școală* (Editura Politică). În paginile ei, 40 de personalități ale țării noastre își evocă adolescența. Ele își aduc aminte de profesori străluciți, de echipe de teatru, de echipe sportive din care au făcut parte, de ziua în care s-au înfiorat pentru prima oară de versul lui Eminescu sau de muzica lui Enescu, de cîte o culegere de probleme în care au descoperit frumusețea matematicii, de prima revistă literară la care au colaborat, de orchestra liceului la care au învățat. Dar aproape nici unul dintre ei nu evocă un anume manual, al unui anumit autor, care să fi marcat o cotitură în formarea sa spirituală. E drept că, în primele decenii ale secolului nostru, manualele erau destul de puține și se găseau greu. Unul dintre cei întrebați mărturisește: „Fiecare dintre noi trebuia să procure un manual. Cînd unul citea la limba română, altul citea la fizică, altul la chimie" (p. 83). Dar acum? Se știe că manualele sînt elaborate prin efortul conjugat al mai multor specialiști, că sînt mereu supuse dezbaterilor, revăzute de la an la an, programa însăși fiind mereu reconsiderată în funcție de stadiul actual al științei și de imperativele societății noastre. Însă unii elevi folosesc prea puțin unele manuale, bizuindu-se în special pe notițele luate la clasă. Manualele școlare, chiar prin destinația lor, trebuie să devină cărți fundamentale ale adolescenței.

ŞIRURI, LIMITĂ, CONVERGENŢĂ

PARIUL ANALIZEI MATEMATICE

De ce oare pare Analiza matematică mai grea decît alte discipline matematice care se învaţă în şcoală? Explicaţia ar fi următoarea: în Analiză apare mai totdeauna, sub o o formă sau alta, infinitul. Analiza matematică se ocupă de procese cu o infinitate de etape; dar se ocupă de ele nu parcurgînd succesiv fiecare etapă (dacă ar proceda astfel, studiul acestor procese nu s-ar încheia niciodată), ci urmărind ce anume se întîmplă prin trecerea de la o etapă oarecare la etapa următoare şi căutînd astfel să sesizeze tendinţa pe care o manifestă procesele respective. O problemă simplă pune în evidenţă această situaţie: Cineva mănîncă azi o jumătate dintr-o pîine, apoi în fiecare zi următoare mănîncă jumătate din cît a mîncat în ziua precedentă. Deoarece nu se fixează nici o limitare a numărului de zile, admiţîndu-se că este vorba de o fiinţă umană utopică, nemuritoare, sîntem tentaţi, pentru a evalua cantitatea totală de pîine pe care o mănîncă această fiinţă în viaţa ei infinită, să efectuăm o operaţie de adunare a o infinitate de numere şi anume $1/2 + 1/2^2 + \ldots + 1/2^n + \ldots$ Această operaţie neobişnuită ar putea fi interpretată în felul următor: adunăm primii doi termeni; rezultatul astfel obţinut îl adunăm cu cel de al treilea termen; noul rezultat îl adunăm cu al patrulea ş.a.m.d. Obţinem, succesiv, numerele 3/4, 7/8, 15/16 ş.a.m.d. Însă, procedînd astfel, nu încheiem operaţia niciodată. Este nevoie de o idee nouă, care să reducă studiul procesului cu o infinitate de etape la un număr finit de paşi. Tocmai acesta este pariul Analizei matematice: a reduce infinitul la finit sau, poate mai bine spus, a studia infinitul cu ajutorul finitului.

RADIOGRAFIA UNUI CAZ

Cum se realizează acest deziderat? Prin descoperirea regulii de trecere de la un termen la altul, adică prin exprimarea acestei treceri într-un mod finit, dar valabil oricare

ar fi rangul termenului. În ceea ce privește problema de mai sus, privind pîinea, regula este următoarea: fiecare termen se obține din termenul imediat precedent, prin înmulțirea cu 1/2. Tocmai descoperirea acestei reguli (prin *regulă* înțelegîndu-se aici o procedură finită, care poate fi aplicată în mod repetat, de un număr finit arbitrar de ori) ne dă posibilitatea să scriem, după $1/2^n$, + ..., expresie care vrea să spună nu ceea ce exprimă ea ca atare, ci ceea ce prin convenție se stabilește în Analiză, adică: se caută un număr (dacă există) de care suma primilor n termeni se apropie oricît de mult dorim dacă n este suficient de mare. În cazul concret de la care am pornit, primii n termeni formează o progresie geometrică a cărei sumă s_n se calculează după un procedeu cunoscut; dar problema de Analiză abia de aici începe: ce tendință manifestă s_n atunci cînd n crește? Intuiția ne spune aici că tendința este apropierea de unu. Se știe că suma unei progresii grometrice de rație $q \neq 1$, primul termen fiind a, iar ultimul aq^n, este $a(1 - q^{n+1})/(1 - q)$. Această expresie se desface în doi termeni $a/(1 - q)$ și $aq^{n+1}/(1 - q)$, dintre care numai al doilea depinde de n. În ultimă instanță, totul depinde de tendința pe care o manifestă q^{n+1} cînd n crește. În cazul care ne interesează, $q = 1/2$, deci este vorba de a se studia șirul de termen general $1/2^{n+1}$. Cînd spunem că acest șir tinde la zero, avem în vedere tendința șirului de *a se apropia oricît de mult dorim de zero* atunci cînd n este *destul de mare*. Ultimelor două expresii subliniate le corespund un număr pozitiv arbitrar, notat în mod tradițional cu litera grecească ε (epsilon) și un număr natural n_ε, în așa fel încît de îndată ce n întrece pe n_ε termenul general $1/2^{n+1}$ al șirului este majorat de ε. Practic, pornim de la inegalitatea $1/2^{n+1} < \varepsilon$ și încercăm să rezolvăm această inegalitate în raport cu n. Obținem $1/\varepsilon < 2^{n+1}$, de unde, prin logaritmare, obținem $\log(1/\varepsilon) < (n + 1) \log 2$, deci $-\log \varepsilon < (n + 1) \log 2$ și $n + 1 > (-\log \varepsilon)/(\log 2)$. Aici, ε este interesant prin valorile sale cît mai apropiate de zero, deci se poate presupune că $0 < \varepsilon < 1$, deci $-\log \varepsilon > 0$. Rezultă astfel că în rolul lui n putem lua orice întreg pozitiv care întrece pe $(-\log \varepsilon/\log 2) - 1$. Am arătat astfel că șirul de termen general $1/2^{n+1}$ tinde la zero, deci suma progresiei geometrice infinite de mai sus este $a|(1 - q)$, unde $a = 1/2$ și $q = 1/2$, deci $a/(1 - q) = 1$. Intuiția a fost astfel confirmată.

Am desfășurat în toate detaliile exemplul de mai sus pentru a putea înțelege, pe această bază concretă, ideea generală de convergență a unui șir de numere reale. Să amintim definiția bine cunoscută (dar rareori înțeleasă în toate articulațiile ei) a acestei noțiuni. Șirul (a_n) converge către a dacă pentru orice număr pozitiv ε există un număr natural n_ε astfel încît de îndată ce $n > n_\varepsilon$ avem $|a_n - a| < \varepsilon$.

O primă observație: Un șir este dat prin termenul său general, adică printr-o regulă care asociază lui n pe a_n, în așa fel încît prin particularizarea valorilor lui n să putem obține oricare termen al șirului. Nu are sens un enunț de forma „Să se studieze convergența șirului 1, 2, 3, ...,", deoarece un șir nu poate fi individualizat, nu poate fi definit nici prin primii trei termeni, nici prin primii 33 sau 333 de termeni. Un număr oricît de mare dar finit de termeni particulari nu poate suplini informația pe care o furnizează termenul general al șirului sau, ceea ce este tot una, informația rezultînd din indicarea regulii de obținere a unui termen oarecare, atunci cînd se cunosc termenii precedenți. Cînd spunem „șirul 1, 2, 3, ...," putem înțelege că este vorba de un șir în care primii trei termeni sînt 1, 2 și 3; numai că acest șir nu este unic determinat, existînd o infinitate de șiruri cu această proprietate. De exemplu, putem lua $a_n = n$, acesta fiind cel mai simplu șir care îndeplinește condiția cerută. Dacă însă convenim să considerăm pe 1 drept primul număr prim, atunci putem lua $a_n =$ al n-lea număr prim. Observînd că termenul al treilea al șirului este suma primilor doi termeni, putem adopta regula $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ $(n > 2)$, care conduce la un șir de tip Fibonacci. Numeroase alte alegeri ne stau în față.

TREI MODALITĂȚI DE IDENTIFICARE A UNUI ȘIR

Cele trei alegeri posibile discutate mai sus ilustrează tot atîtea modalități diferite de identificare a unui șir. Prima modalitate constă în indicarea directă și explicită a corespondenței $n \to a_n$, printr-o anumită formulă. Să nu uităm că șirul este o funcție definită pe mulțimea numerelor naturale, deci, ca orice funcție, se poate defini prin indicarea regulii de asociere, unei valori oarecare a argumentului, a unei valori bine determinate a funcției. A treia alegere, ca șir Fibonacci, folosește o altă modalitate, în care termenul

general nu mai este indicat direct, ci prin intermediul unei formule de recurență. Această modalitate compensează caracterul ei indirect prin avantajul de a pune în evidență procesul de formare a șirului, natura sa generativă. Cea de a doua alegere are la bază o altă modalitate, diferită de celelalte două. Într-adevăr, aici nu se mai indică formula lui a_n ca funcție de n, nici vreo formulă de recurență, care să lege un termen oarecare de termenii precedenți. Există însă o regulă precisă de obținere a numărului prim de rang n atunci cînd se cunosc toate numerele prime de rang inferior, deci șirul este perfect definit, cu ajutorul unui algoritm. O situație asemănătoare apare și la alte șiruri importante, cum ar fi șirul aproximațiilor raționale ale lui $\sqrt{2}$, șirul aproximațiilor zecimale ale lui pi sau ale lui e, baza logaritmilor naturali.

VALORI MARI PENTRU n ȘI VALORI MICI PENTRU EPSILON

Centrul de greutate în definiția convergenței unui șir îl constituie existența lui n_ε cu proprietatea indicată. De multe ori este posibilă indicarea efectivă a lui n_ε, așa cum s-a întîmplat în problema privind împărțirea pînii. Ori de cîte ori se află în discuție problema convergenței unui șir, atenția principală trebuie să se îndrepte asupra lui n_ε. Nu este vorba aici de o funcție de epsilon, deoarece n_ε nu este unic determinat, el putînd fi oricînd înlocuit de un alt număr natural, mai mare. (Există însă, în axiomatica lui Peano a numerelor naturale, o axiomă care afirmă că orice mulțime de numere naturale conține un cel mai mic element; dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ alegem pe cel mai mic n_0 posibil, atunci obținem o funcție de ε). Este deci clar că, în ceea ce privește pe n, ne îndreptăm atenția spre valorile mari.

Să mai observăm faptul că, deși ε este un număr pozitiv arbitrar, valorile sale sînt cu atît mai interesante, cu cît sînt mai apropiate de zero. Practic, dacă pentru o anumită valoare ε_0 a lui ε am demonstrat existența unui n_0 cu proprietatea cerută, atunci condiția din definiția convergenței va fi de la sine îndeplinită pentru orice număr $\varepsilon > \varepsilon_0$. Tocmai de aceea ne-am putut permite, în problema de mai sus, privind împărțirea pînii, să presupunem că $0 < \varepsilon < 1$. De multe ori, această orientare a atenției spre valori din ce în ce mai mici ale lui ε (în contrast cu orientarea spre valorile mari ale lui n) se materializează prin considerarea unui șir descrescător $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \quad > \varepsilon_n >$ tinzînd la zero. De

altfel, litera grecească ε a devenit atît de puternic legată de notarea unor valori mici, încît cuvîntul *epsilon* a devenit un simbol al micimii.

CONVERGENŢA CA JOC STRATEGIC

La o sugestie oferită de Richard Courant şi Herbert Robbins (*What is Mathematics?*, Oxford University Press, London, 1941—1945—1947; traducere românească *Ce este Matematica?*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969), putem concepe ideea de convergenţă sub forma unui joc cu doi parteneri, A şi B. A propune aproximarea cantităţii a printr-un termen al şirului (a_n), cu o eroare care nu depăşeşte pe $\varepsilon_1 > 0$, B încearcă să satisfacă această cerere. Dacă nu reuşeşte, jocul se încheie cu victoria lui A iar şirul nu converge către a. Dacă însă B reuşeşte să demonstreze existenţa unui n_1 cu proprietatea că pentru $n > n_1$ eroarea $|a - a_{n_1}|$ este inferioară lui ε_1, atunci A devine mai exigent şi înlocuieşte toleranţa ε_1 admisă pentru eroare printr-o alta, mai mică, ε_2. Dacă B reuşeşte să îndeplinească şi această condiţie (în cazul contrar A cîştigă prin proclamarea neconvergenţei către a a şirului a_n), găsind un n_2 astfel încît pentru $n > n_2$ eroarea $|a_n - a|$ este inferioară lui ε_2, atunci A măreşte şi mai mult pretenţiile, înlocuindu-l pe ε_2 prin $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$. Să presupunem că B face faţă şi acestei noi provocări iar confruntarea continuă. Să admitem că B, asemenea eroilor din unele basme populare, rezistă fiecărei puneri la încercare din partea lui A şi găseşte totdeauna un număr întreg convenabil n_ε; şirul (a_n) este în acest caz convergent către a. Dacă această convergenţă nu are loc, atunci A are posibilitatea să-l pună în dificultate pe B. Tensiunea acestei confruntări creşte pe măsură ce numărul ε produs de A este mai mic. În multe cazuri, deznodămîntul nu poate fi anticipat; există şiruri importante a căror natură nu este cunoscută încă, iar alteori, deşi convergenţa a fost stabilită, se ştiu prea puţine lucruri despre proprietăţile limitei a. Pentru a da un singur exemplu, vom menţiona şirul definit de $a_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n - \ln n$, care converge către aşa-numita constantă c a lui Euler, dar despre numărul c nu se ştie încă nici măcar dacă este sau nu iraţional. Personajul A simbolizează aici ştiinţa, cu numeroasele ei provocări, iar B reprezintă pe cercetătorul ştiinţific, decis să se lupte cu necunoscutul. Performanţa optimă a lui B

ar fi să convingă „publicul" (adică pe ceilalți matematicieni) că A nu are nici o șansă de a-l pune în dificultate, nici după o sută, o mie sau un milion de tentative. În felul acesta, scenariul potențial infinit al confruntării de mai sus devine finit, așa cum s-a întîmplat în problema privind împărțirea pîinii.

AHILE, BROASCA ȘI CONVERGENȚA

Este bine cunoscut paradoxul lui Zenon în legătură cu Ahile (cel iute de picior) și broasca (renumită pentru încetineala ei). Să presupunem că broasca pornește la momentul zero din poziția s_0 și ajunge după durata t_1 în poziția s_1, în timp ce Ahile pornește din s_0 abia cînd broasca se află în s_1 iar în s_1 ajunge după o durată t_2 care aduce broasca în poziția s_2. Continuînd în acest fel, Ahile va ajunge din poziția s_{n-1} în poziția s_n după o durată t_{n+1} care aduce broasca în poziția mai avansată s_{n+1}. S-ar părea deci că Ahile este sortit să rămînă mereu în urma broaștei, în ciuda faptului că o intuiție elementară ne sugerează contrariul; într-adevăr, viteza lui Ahile este mai mare decît a broaștei și experiența ne-a convins că un alergător A mai rapid decît un alt alergător B îl va ajunge din urmă pe B după un interval finit de timp (chiar dacă acest interval poate fi foarte mare).

De unde provine aici contradicția dintre intuiție și calcul? Durata totală necesară lui Ahile pentru a ajunge în poziția s_n este $t_2 + \ldots + t_{n+1}$. Deoarece în raționamentul lui Zenon sînt implicate o infinitate de momente și de poziții, avem impresia că durata asociată este infinită. Tocmai din această impresie înșelătoare, după care parcurgerea unui șir infinit de momente are nevoie de un timp infinit, se naște paradoxul lui Zenon. Însă șirul de termen general $t_2 + \ldots + t_{n+1}$ nu tinde obligatoriu la infinit cînd n crește. În funcție de expresia lui t_n, limita șirului menționat (limită care există în mod cert, deoarece șirul este crescător) poate fi infinită sau finită. Dacă este finită, fie ea egală cu t, atunci după durata t Ahile va ajunge din urmă broasca.

I-a trebuit omenirii multă vreme pentru a ajunge cu rigoarea necesară la constatarea că un șir crescător poate fi convergent.

DE LA NUMERE NATURALE LA NUMERE COMPLEXE

NUMĂRUL, PRIMUL OBIECT AL MATEMATICII

Așa cum nu poți face agronomie fără a cunoaște proprietățile solului, nu poți studia diferite clase de funcții fără a aprofunda în prealabil structura mulțimilor pe care aceste funcții urmează să fie definite. În această ordine de idei, prima mulțime care se impune atenției este mulțimea numerelor reale, notată cu R. Este suficient să ne gîndim că orice funcție de timp este o funcție de variabilă reală, deoarece timpul este modelat matematic printr-o variabilă care parcurge de obicei un anumit interval real (finit sau infinit). De asemenea, din punct de vedere metodologic funcțiile definite pe R (sau pe o parte a lui R) cu valori în R constituie reperul cel mai important în studiul tuturor celorlalte funcții, tipul cel mai intuitiv, termenul de referință în formarea ipotezelor noastre privind funcțiile definite în spațiul euclidian cu un număr oarecare de dimensiuni.

Dar nu numai în legătură cu studiul funcțiilor este importantă mulțimea R. Să nu uităm că numărul constituie chiar din punct de vedere istoric unul dintre primele obiecte (dacă nu chiar primul obiect) studiate în matematică. Chiar omul cel mai rudimentar, care-și face despre matematică o imagine aproape caricaturală, știe că această disciplină se ocupă de numere. Primul contact al copilului cu matematica se face prin numere. Învățăm să numărăm chiar înainte de a învăța să citim. Faptul acesta arată că numerele naturale 1, 2, 3,... au nu numai o bază empirică elementară, dar aparțin și moștenirii noastre ereditare. O imagine cît de simplificată despre cultură nu poate omite numărul natural. Dar de la intuiția primelor numere naturale 1, 2, 3,... pînă la conceptul de număr natural, exprimat prin termenul general n al șirului numerelor naturale, omenirea a parcurs o cale lungă; o prezentare mai riguroasă a mulțimii numerelor naturale nu apare înainte de sfîrșitul secolului al XIX-lea. Prima clarificare, prima etapă în lămurirea noțiunii de număr real, va trebui deci să fie precizarea statutului mulțimii

N a numerelor naturale. Urmărind în continuare etapele prin care am trecut ca elevi în clasele primare și gimnaziale, ne vom aminti de trecerea de la numere naturale la fracții și la numere negative; am luat astfel contact cu mulțimea Z a numerelor întregi și cu mulțimea Q a numerelor raționale, alte două etape importante spre cristalizarea ideii de număr real. Să încercăm să reparcurgem aceste etape, cu spiritul de rigoare cu care ne-a obișnuit matematica ultimelor clase liceale.

MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Ideea de număr natural sintetizează o experiență umană milenară, pe care o concretizăm prin cîteva fapte remarcabile, care, tocmai pentru că au intrat în obișnuințele noastre de gîndire, pot să treacă neobservate; ele trebuie explicitate și aduse în primul plan al atenției. În primul rînd, însăși mulțimea N a numerelor naturale are un caracter primitiv, ca și relația de mărime $\leqslant$ cu care ea este înzestrată. Știm acum, pe baza cunoștințelor de algebră pe care le avem, că $\leqslant$ este o relație de ordine în N (adică o relație reflexivă, antisimetrică și tranzitivă) și că această relație de ordine este totală (adică oricare două numere naturale, a și b se află în una din relațiile $a \leqslant b$, $b \leqslant a$). Dar, precizăm, aceste fapte nu fac obiectul unor teoreme, ci sînt acceptate pe o bază empirică; altfel spus, le acceptăm ca fapte primitive ireductibile la o situație logică mai simplă, deci au un statut de axiomă. Mai mult decît atît, despre relația de inegalitate $\leqslant$ între numere naturale acceptăm, tot pe bază empirică, unele proprietăți pe care matematicianul italian Giuseppe Peano le-a sistematizat în forma următoare: 1) Orice parte nevidă a lui N are un prim element. Aceasta înseamnă că dacă $S \subset N$, $S \neq 0$, atunci există x în S cu proprietatea că pentru orice y în S avem $x \leqslant y$. Pentru a înțelege interesul acestei proprietăți, trebuie să avem în vedere posibilitatea ca S să fie infinită. Faptul că *orice* mulțime infinită de numere naturale conține un cel mai mic element este departe de a fi o banalitate, dacă ne gîndim la faptul că multe alte mulțimi de numere nu conțin un număr care este cel mai mic (a se vedea în acest sens mulțimile Z, Q și R, și intervalul deschis $(0, 1)$). 2) Orice număr natural, exceptîndu-l pe cel mai mic, notat cu 1, admite un predecesor imediat; cu alte cuvinte, pentru orice x din N, $x \neq 1$, există y în N astfel încît $y < x$ și pentru

orice $z < x$ avem $z \leqslant y$. În sfîrșit, mai admitem: 3) Nu există un cel mai mare număr natural, cu alte cuvinte pentru orice x din N există y în N cu proprietatea $x < y$ (se subînțelege că $<$ înseamnă $\leqslant$ și $\neq$).

Nu este greu de demonstrat, pe baza proprietăților de mai sus, că orice număr natural are un succesor imediat. Mai important este însă faptul că putem da un sens riguros ideii de *mulțime finită de numere naturale:* ea se definește prin existența în mulțime a unui ultim element. Putem astfel defini ce înseamnă că o mulțime oarecare (deci nu neapărat formată din numere naturale) este finită; înseamnă că există o aplicație injectivă a ei într-o parte finită a lui N. Acum, definirea mulțimilor infinite este clară; ea se obține prin negarea proprietății de finitudine.

Nu putem ascunde caracterul oarecum artificial al considerațiilor de față. Într-adevăr, alegerea propozițiilor relative la $\leqslant$ cărora li se conferă un statut de axiomă este pînă la un anumit punct convențională. Schimbînd convenția, alte propoziții devin axiome iar fostele axiome devin teoreme. Această situație apare în orice construcție axiomatică. Ceea ce este însă esențial e faptul că existența unor propoziții cu statut de axiomă nu poate fi evitată. În orice sistem axiomatic există o parte de joc, în limitele căruia putem aborda problemele de simplitate și de economie a sistemului. De exemplu, în alte prezentări ale lui N principiul inducției complete nu este o teoremă, ca în cele ce urmează, ci o axiomă.

PRINCIPIUL INDUCȚIEI COMPLETE

Cea mai importantă consecință a axiomaticii lui Peano a numerelor naturale (așa se numește construcția prezentată în paragraful anterior) este faimosul principiu al inducției complete, care de fapt este o teoremă în cadrul axiomaticii lui Peano. Am mai discutat despre acest principiu cu alte ocazii, dar importanța sa face necesară o reconsiderare mai sistematică. Să considerăm o parte S a lui N; să presupunem că S conține pe 1 și că, împreună cu fiecare element x din S, se află în S și succesorul imediat al lui x, fie el x'. În aceste condiții avem $S = N$. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $T = N - S$ este nevidă și fie x primul element din T. Deoarece 1 nu se află în T, ci în S, x este diferit de 1, deci are un predecesor imediat y. Însă y aparține lui S, deci $y' = x$ ar trebui de asemenea

să se afle în S, în contradicție cu faptul că x se află în T. Contradicția obținută arată că ipoteza $T \neq 0$ este falsă, deci $S = N$.

Fie acum o proprietate $P(n)$ depinzînd de numărul natural n. Să presupunem că $P(1)$ este adevărată și că dacă $P(n)$ este adevărată atunci și $P(n+1)$ este adevărată. Vom arăta că, în aceste condiții, $P(n)$ este adevărată pentru orice n. Într-adevăr, mulțimea S a numerelor naturale pentru care $P(n)$ este adevărată satisface ipotezele din teorema de mai sus, deci $S = N$.

În practică, folosirea principiului inducției complete este însă ceva mai complicată. Aceasta se datorează faptului că proprietatea $P(n)$ nu este totdeauna cunoscută a priori, uneori trebuind ca ea să fie descoperită prin tatonare. În consecință, practica principiului inducției complete cunoaște două variante, pe care le vom numi *inducție de verificare* (atunci cînd proprietatea $P(n)$ este cunoscută a priori) și *inducție de descoperire* (atunci cînd proprietatea $P(n)$ trebuie găsită prin diferite încercări). Distincția poate fi explicată pe un exemplu simplu, cunoscut din manualul de algebră. Avem în vedere dezvoltarea puterii de exponent n a unui binom. În prima variantă, a inducției de verificare, formula lui Newton care dă dezvoltarea puterii de exponent n este considerată cunoscută, noua rămînîndu-ne numai s-o confirmăm. În aceste condiții, procedăm exact după teorema de mai sus. Notînd cu S mulțimea numerelor naturale n pentru care formula lui Newton este valabilă, controlăm dacă 1 aparține lui S și dacă din apartenența lui n la S rezultă că $n + 1$ aparține lui S. Se știe că aceste controale se soldează cu un răspuns afirmativ. Desigur, această inducție de verificare este, de multe ori, destul de comodă, deoarece ocolește tocmai chestiunea cea mai delicată: Cum a fost găsită formula lui Newton? Se rupe astfel actul de imaginare a formulei lui Newton de procesul de demonstrare a acestei formule. O atare ruptură nu contribuie la formarea unei gîndiri matematice complete, dimpotrivă, dă impresia că găsirea este în matematică o operație accesibilă numai unei elite, celor mulți fiindu-le accesibilă doar verificarea unor rezultate.

Altfel se prezintă inducția de descoperire. Deosebirea care apare aici față de inducția de verificare constă în faptul că, necunoscînd proprietatea $P(n)$ (care trebuie mai întîi descoperită), trebuie să compensăm această ignoranță printr-o tatonare a situației nu numai pentru $n = 1$, ci și pentru $n = 2$, $n = 3$, continuînd atît cît este necesar pentru a

se contura o anumită *regulă* de formare. În cazul nostru, este vorba de regula de formare a coeficienților în dezvoltarea binomială. Este suficient să urmărim ceea ce se întîmplă pentru primele patru valori ale lui n pentru a putea bănui ce se întîmplă în cazul general; dar, evident, confirmarea deplină nu poate fi obținută fără a parcurge cea de a doua etapă a inducției.

Să observăm că raționamentul prin inducție completă participă în mod esențial la structurarea mulțimii N sub forma unui semigrup aditiv comutativ. Într-adevăr, fără inducția completă nu putem defini operația de adunare a două numere naturale, operație asociativă și comutativă, dar față de care nu există în N nici element unitate, nici element invers unui element dat.

NUMERE ÎNTREGI ȘI NUMERE RAȚIONALE

Ca și în cazul numerelor naturale, este vorba aici nu de a face cunoștință cu numerele întregi și cu cele raționale, ci de a arunca asupra lor o privire globală, retrospectivă, care să ne permită să vedem mai bine pădurea multă vreme nevizibilă din cauza copacilor. Într-adevăr, ceea ce deosebește abordarea de acum de aceea din clasele primare și gimnaziale este faptul că la început eram preocupați de numere întregi și raționale considerate individual, în concretețea lor, pentru ca apoi, treptat, atenția să se deplaseze către *mulțimea* numerelor întregi și *mulțimea* numerelor raționale. Mai precis, itinerarul este următorul. Mai întîi lucrăm cu numere întregi și raționale, le urmărim în practica matematică obișnuită, apoi ne întrebăm dacă modul de a opera cu ele și de a le compara nu poate fi un mod de a caracteriza mulțimea lor. Algebra are aici un rol primordial. Ea intervine în însăși definiția acestor numere, prin anumite relații de echivalență, apoi în compararea lor, prin anumite relații de ordine, pentru ca descrierea comportamentului lor față de anumite operații să facă apel la diferite tipuri de structuri algebrice (grup, inel, corp etc.). Toate aceste etape trebuie clarificate cu grijă. Spre deosebire de mulțimea N, unde numeroase aspecte sînt de natură empirică și își găsesc expresia în obiecte considerate ca date (cum sînt chiar numerele naturale și relația de inegalitate dintre ele), sau în enunțuri cu statut de axiomă, deci acceptate pe o bază convențională, în mulțimile Z și Q partea convențională se reduce considerabil (fără ca ea să dispară cu totul). Nu-

mărul întreg nu este un individ, ci o clasă. Dacă $a + d = b + c$, atunci perechile $<a, b>$ și $<c, d>$ de numere naturale sînt considerate echivalente. Clasele de echivalență astfel obținute se numesc numere întregi și alcătuiesc mulțimea Z. Putem deci spune că fiecare număr întreg are o infinitate de reprezentanți. În raport cu operațiile de adunare și înmulțire, Z constituie un inel (total ordonat față de $\leq$). Numărul rațional este definit ca o clasă de perechi ordonate echivalente de numere întregi (cu al doilea element al perechii diferit de zero). Perechile $<a, b>$ și $<c, d>$, de numere din Z sînt considerate echivalente dacă $ad = bc$. Operațiile de adunare și de înmulțire a numerelor raționale conferă mulțimii lor Q o structură de corp. Acest corp este total ordonat, în sensul că oricare două numere raționale sînt comparabile din punctul de vedere al relației $\leq$. Dar deosebirea structurală dintre Q și Z nu este numai aceea dintre corp și inel. Mulțimea Q are o proprietate de densitate (în sensul că între două numere raționale distincte există totdeauna un al treilea număr rațional) pe care nu o întîlnim nici la Z, nici la N.

DE CE NU NE MULȚUMIM CU NUMERE RAȚIONALE?

Dacă un dreptunghi are laturile de lungime egală cu 3 respectiv 4 cm, atunci diagonala dreptunghiului (de lungime egală cu 5 cm, conform teoremei lui Pitagora) este comensurabilă cu laturile, cu alte cuvinte ele admit o unitate comună de măsură. Pare surprinzător că ceea ce este posibil pentru dreptunghi nu mai este posibil pentru pătrat. Descoperirea inexistenței unei unități comune de măsură pentru latura și diagonala unui pătrat este atribuită școlii lui Pitagora. Platon mărturisește în opera sa *Legile* că a fost foarte impresionat de această descoperire. Să vedem cum se demonstrează acest fapt. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există un segment de dreaptă de lungime a care se cuprinde de un număr exact de ori atît în segmentul care constituie latura unui pătrat cît și în segmentul constituit de diagonala acestuia; fie b lungimea întreagă a laturii și d lungimea întreagă a diagonalei. Aplicînd teorema lui Pitagora, obținem relația $d^2 = 2b^2$, unde b și d sînt numere întregi (conform ipotezei). Putem presupune că b și d nu au nici un factor comun; altfel, putem simplifica prin acest factor, procedînd la o realegere a unității a. Paritatea lui d^2 implică paritatea lui d (altfel, pătratul lui d

ar fi impar), deci, prin simplificare cu 2, s-ar obține paritatea lui b^2, deci a lui b, în contradicție cu faptul că b și d sînt primi între ei. Am demonstrat astfel că nu există nici un număr rațional al cărui pătrat este egal cu 2.

O altă problemă de însemnătate istorică, obiect al unei preocupări care se pierde în negura vremurilor, se referă la numărul π. În spatele acestui număr se ascunde o teoremă: Raportul dintre lungimea unui cerc și aceea a diametrului său este același la orice cerc. Valoarea acestui raport este celebrul număr π. Povestea acestui număr este atît de captivantă, încît a făcut obiectul unei cărți (Florica T. Cîmpan, *Istoria numărului* π, Editura Tineretului, 1965) care se citește ca un roman polițist. De natura numărului π se leagă faimoasa problemă a cuadraturii cercului: Să se construiască latura pătratului de arie egală cu aria unui cerc dat. Ceea ce ne interesează aici este iraționalitatea numărului π, stabilită abia în 1767, de către Johann Heinrich Lambert și redemonstrată de Adrien Marie Legendre în 1794. Demonstrația lui Lambert pleacă de la iraționalitatea lui $\operatorname{tg}(1/n)$ pentru orice număr natural n. Lambert arată că are loc și următoarea proprietate: Funcția tangentă nu poate lua valori raționale diferite de zero decît pentru valori iraționale ale argumentului. Însă, după cum se știe, $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, deci $\pi/4$ este irațional.

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Este deci evident acum că, dacă am rămîne numai la numere raționale, multe întrebări ar rămîne fără răspuns, fiind nevoiți să introducem interdicții dintre cele mai severe pentru ca nu cumva operațiile considerate să ne scoată din mulțimea Q. Nu ar fi o strategie potrivită. Numai că de la înțelegerea inevitabilității considerării numerelor iraționale pînă la găsirea pentru aceste numere a unui statut acceptabil din punct de vedere matematic este o cale lungă. I-a trebuit omenirii peste două mii de ani pentru a o putea parcurge. Abia în secolul al XIX-lea s-au cristalizat modalități de definire a conceptului de număr real, în așa fel încît el să includă, printr-un procedeu uniform, atît numerele raționale cît și numerele iraționale. Una dintre aceste modalități, probabil cea mai apropiată de reprezentarea zecimală a numerelor, cu care sîntem familiarizați din clasele gimnaziale, pleacă de la mulțimea Q și se folosește de șirurile (a_n) convergente Cauchy de numere raționale. Două

astfel de şiruri sînt considerate echivalente dacă şirul-diferenţă tinde la zero. Fiecare clasă de echivalenţă astfel obţinută defineşte un număr real. Procedeul este în acelaşi timp riguros şi intuitiv. Riguros, deoarece se sprijină pe concepte riguros definite: mulţimea Q, ideea de convergenţă Cauchy (pentru orice $\varepsilon > 0$ există n_ε astfel încît pentru $m, n > n_\varepsilon$ avem $|a_m - a_n| < \varepsilon$), relaţia de echivalenţă. Intuitiv, deoarece corespunde perfect ideii foarte familiare după care un număr admite, în general, în scriere zecimală, o reprezentare infinită, dar există o infinitate de alte şiruri care sînt echivalente cu cel dat de reprezentarea zecimală.

O altă definiţie a numărului real procedează pornind tot de la mulţimea Q şi se foloseşte de noţiunea de interval deschis inferior în Q, adică o mulţime $I \subsetneq Q$, $I \neq 0$, astfel încît, pentru orice x din I, există y în I pentru care $x < y$ şi oricare ar fi $z < x$, avem $z \in I$. Orice interval deschis inferior în Q constituie prin definiţie un număr real. Dacă acum definim noţiunea de extremitate a unui interval deschis inferior I drept un număr a astfel încît oricare ar fi x în I, avem $x < a$ şi, oricare ar fi b cu proprietatea $x < b$ pentru orice x în I, avem $a \leqslant b$, constatăm că nu orice interval în Q admite extremitate în Q. (De exemplu, intervalul $I = \{x;\ x \in Q,\ x \leqslant 0$ sau $x > 0$ şi $x^2 < 2\}$ nu admite extremitate în Q.) Se poate însă arăta că, în mulţimea R a numerelor reale, orice interval deschis inferior admite extremitate.

Constatăm deci că definirea noţiunii de număr real cu ajutorul şirurilor de numere raţionale (aici intră ca un caz particular numerele reale definite cu ajutorul fracţiilor zecimale infinite), are nevoie de definirea prealabilă a noţiunii de convergenţă Cauchy, în timp ce calea a doua, care face apel la intervale deschise inferioare, nu are nevoie de noţiunea de convergenţă; însă şi aici spiritul Analizei matematice este prezent prin teorema menţionată: Orice interval deschis inferior din Q sau din R are extremitate dreaptă în R. Nu este greu de văzut că extremitatea dreaptă reprezintă pentru un interval deschis inferior ceea ce în terminologia manualului de Analiză de clasa a XI-a constituie marginea superioară a acestui interval. Din existenţa în R a marginii superioare (adică a celei mai mici majorante) a oricărui interval deschis inferior rezultă uşor existenţa marginii superioare pentru o mulţime majorată oarecare conţinută în R. Putem deci spune că, definind numărul real ca interval deschis inferior în Q, propoziţia *Orice mul-*

ţime majorată de numere reale admite margine superioară devine o teoremă. În schimb, în abordarea axiomatică de natură algebrică a mulţimii R pe care o găsim în manualul de clasa a XI-a, acelaşi enunţ are statut de axiomă. Nu este însă o axiomă oarecare, deoarece ea marchează tocmai deosebirea dintre R şi Q (toate celelalte axiome, care conferă lui R calitatea de corp comutativ total ordonat, sînt valabile şi pentru Q, care are aceeaşi structură algebrică de corp comutativ total ordonat).

CONSTRUCTIV ŞI DESCRIPTIV

Să rezumăm şi să sistematizăm. Numerele reale pot fi introduse fie pe cale *constructivă*, fie pe cale *descriptivă* (axiomatică). Deosebim două moduri de a le construi: unul bazat pe şiruri Cauchy de numere raţionale, celălalt cu ajutorul intervalelor deschise inferioare de numere raţionale. În ambele cazuri, presupunem deci cunoscută mulţimea Q a numerelor raţionale, dar definirea numerelor reale nu se mulţumeşte doar să adauge la Q numere noi, ci reconsideră şi numerele raţionale care, în ipostaza lor de numere reale, îşi dezvăluie aspecte noi. (De altfel, trebuie să observăm că şi introducerea numerelor raţionale a creat o ipostază nouă pentru numerele întregi, după cum introducerea numerelor întregi ne-a obligat să reconsiderăm numerele naturale, devenite în noua situaţie creată de Z numere întregi pozitive). Putem deci spune că numărul natural trece, pe parcursul $N - Z - Q - R$, prin trei metamorfoze, numărul întreg trece prin două reconsiderări iar numărul raţional trece printr-o singură reinterpretare.

O trăsătură comună a mulţimilor Z, Q şi R (în varianta claselor de şiruri Cauchy) este faptul că toate îşi definesc elementele drept clase infinite de echivalenţă, relaţia de echivalenţă fiind definită de fiecare dată cu ajutorul mulţimii anterioare (deci cu ajutorul lui N în ceea ce priveşte pe Z, cu ajutorul lui Z în cazul lui Q şi cu ajutorul lui Q în cazul lui R). În cazul numerelor reale, infinitatea apare de două ori, deoarece un număr real este o clasă *infinită* de şiruri Cauchy echivalente de numere raţionale iar un astfel de şir are, la rîndul său, o *infinitate* de termeni. Prima infinitate ascultă de o proprietate de invarianţă, în sensul că dacă s-a stabilit că un şir de numere raţionale este un şir Cauchy atunci *orice* şir echivalent cu el este de asemenea şir Cauchy. A doua infinitate pune

probleme de aproximare care conduc la constatarea că orice număr real poate fi aproximat oricît de bine dorim prin numere raționale. Însă această posibilitate de reducere nelimitată a erorii este una de principiu; în fapt, ea este mereu condiționată de stadiul în care se află evoluția mijloacelor de calcul și de necesitatea ca durata calculului să fie rezonabilă. Un rol important însă îl are aici și cercetarea teoretică, deoarece convergența unui șir poate fi ameliorată, în sensul înlocuirii șirului dat cu un altul, care converge către aceeași limită, dar „mai repede".

În ceea ce privește calea descriptivă de introducere a numerelor reale, cale urmată în primul capitol al manualului de Analiză de clasa a XI-a, primul fapt care frapează este *caracterul său global*. Într-adevăr, aici existența individuală a unui număr real se estompează prin abstractizare. Numerele reale devin elemente indiscernabile, singurul fapt care contează fiind operațiile cu aceste elemente și relația de ordine care se stabilește între ele. Cu alte cuvinte, *substanța* numerelor reale este înlocuită cu *structura* mulțimii lor. Este adevărat că, pornind de la oricare dintre definițiile constructive ale numerelor reale, putem stabili pe cale deductivă structura de corp comutativ total ordonat a lui R și proprietatea de existență a marginii superioare pentru orice parte majorată a lui R. Putem însă parcurge și drumul invers? Nu cumva există mai multe corpuri cu proprietățile menționate, corpul numerelor reale în sens efectiv fiind doar unul dintre acestea? Manualul de clasa a XI-a ne dă răspunsul: Structura de corp comutativ total ordonat care satisface axioma marginii superioare determină pe R pînă la un izomorfism. Cu alte cuvinte, dacă A și B sînt două corpuri cu proprietățile menționate, atunci există o aplicație bijectivă f a lui A pe B astfel încît $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$, din $x \leqslant y$ rezultă $f(x) \leqslant f(y)$ iar elementele neutre (față de adunare și înmulțire) din A sînt transformate de f în elementele neutre din B.

Dar, în ceea ce privește aspectul axiomatic al lui R, încă două fapte trebuie amintite. *Axioma lui Arhimede* afirmă că fiecărei perechi de numere reale strict pozitive a și b îi corespunde un număr natural n cu proprietatea $na > b$. (Am explicat semnificația acestei axiome în cartea noastră *Paradoxul*, Editura Albatros, 1964, p. 50—52). Negația acestei axiome conduce la existența faimoșilor „infiniți mici" ai lui Leibniz. *Axioma lui Cantor și Dedekind* afirmă (în ultimă instanță) existența unei corespondențe bijective între mulțimea R și mulțimea punctelor unei drepte. Se

știe că în cadrul geometriei analitice create de René Descartes în secolul al XVII-lea se stabilește o corespondență între numere și puncte, pe baza alegerii unei anumite unități de măsură și a unui sens de parcurgere pe dreaptă. Riguroasă în ceea ce privește numerele raționale și punctele de abscisă rațională ale dreptei, această corespondență nu putea căpăta un statut satisfăcător atîta vreme cît numerele iraționale nu aveau un statut clar. După clarificările aduse în secolul al XIX-lea, în ceea ce privește definirea numerelor iraționale (și, de fapt, a numerelor reale în general) prin una sau alta dintre modalitățile indicate mai sus, s-a cristalizat ceea ce azi numim *axioma continuității* (alt nume pentru axioma lui Cantor și Dedekind), axiomă în care partea de noutate se referă la posibilitatea de a asocia fiecărui număr irațional un punct unic determinat pe dreaptă. Într-un mod mai precis, putem spune că dacă (a_n) este un șir crescător de numere raționale iar (b_n) este un șir descrescător de numere raționale, astfel încît șirul de termen general $b_n - a_n$ tinde la zero, iar $a_n < b_n$ pentru orice n, atunci, notînd cu A_n punctul asociat pe dreaptă lui a_n și cu B_n punctul asociat lui b_n, există pe dreaptă un punct și numai unul comun segmentelor de dreaptă A_nB_n (pentru orice număr natural n) iar acest punct este asociat numărului real care este limita comună a șirurilor (a_n) și (b_n).

NUMERE COMPLEXE

Ca o completare și continuare firească a considerațiilor anterioare privind numerele reale, discutăm aici evoluția și semnificația numerelor complexe, în al căror studiu se află implicate toate capitolele matematicii școlare: algebra, geometria și trigonometria.

Numerele complexe se definesc cu ajutorul numerelor reale, dar aceasta nu înseamnă că numerele complexe au apărut în matematică abia după ce, în secolul trecut, se cristalizase conceptul riguros de număr real, în forma pe care l-am amintit-o anterior. Față de rezistența îndelungată opusă introducerii numerelor întregi, istoria numerelor complexe este mai puțin furtunoasă, dar la fel de instructivă, deoarece fiecare dintre noi reface oarecum pe cont propriu experiența întregii omeniri. Numerele întregi pozitive, cele raționale pozitive și operațiile cu ele au fost acceptate de către egipteni și babilonieni, pe o bază empirică, încă cu vreo 2 000 de ani înainte de era noastră. Cu numerele nega-

tive, introduse încă în vechea cultură indiană, lucrurile au mers mai greu. Timp de o mie de ani ele erau privite cu suspiciune, deoarece lipsea suportul intuitiv, fizic, pe care-l aveau numerele naturale și fracțiile formate cu acestea. Dificultăți și mai mari au comportat iraționalele, care, deși recunoscute de pitagoricieni, n-au căpătat la grecii vechi clasici statutul de numere (matematicianul-poet Dan Barbilian — Ion Barbu vedea în acest fapt una dintre marile limitări ale spiritului grec: „Criza civilizației științifice grecești a fost imposibilitatea de a concepe numărul irațional"). Pentru vechii greci, iraționalele nu erau numere ci lungimi (de segmente de dreaptă). Viziunea matematică a grecilor era una preponderent geometrică. Un anumit progres s-a înregistrat abia în cadrul civilizației grecești alexandrine (rezultat al unei anumite combinații a trei civilizații: greacă clasică, egipteană și babiloniană) și la indieni și arabi. Deși prezentarea logică a numerelor iraționale s-a făcut abia în a doua jumătate a secolului trecut (începînd cu deceniul al optulea), acceptarea lor s-a produs mult înainte, gradual, de-a lungul unei mari perioade de timp.

Care este situația numerelor complexe? Definiția lor riguroasă, ca perechi ordonate de numere reale, perechi a căror mulțime capătă o organizare algebrică de corp comutativ, nu trebuie să ne ascundă originea, motivația și istoria lor. Matematica școlară ne-a pus în situația în care numerele complexe se dovedesc a fi inevitabile. Încă în studiul ecuației de gradul al doilea constatăm că nu orice astfel de ecuație admite rădăcini în mulțimea numerelor reale, dar *orice* ecuație de gradul al doilea, cu coeficienți reali, admite rădăcini în corpul C al numerelor complexe. Un fapt remarcabil este proprietatea rădăcinilor complexe de a fi totdeauna în număr par; dacă un număr complex este rădăcină a unei ecuații algebrice, atunci și conjugatul său este rădăcină a aceleiași ecuații. De aici, importanța noțiunii de conjugat al unui număr complex și a proprietăților sale: Conjugatul unei sume este suma conjugatelor termenilor; conjugatul unui produs este produsul conjugatelor factorilor; conjugatul inversului unui număr complex diferit de zero este inversul conjugatului acestui număr; conjugatul conjugatului unui număr complex este chiar acest număr.

Numerele complexe se reprezintă prin puncte în plan. Punctul de coordonate (x, y) asociat numărului $z = x + iy$ se numește *afixul* lui z. Numărul real pozitiv $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se numește *modulul* lui z; este ușor de verificat că $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$,

unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z. Modulul lui z este egal cu distanța dintre originea axelor și afixul lui z.

O noțiune delicată este aceea de *argument* al unui număr complex z: este vorba de unghiul φ format de semidreapta reală pozitivă și semidreapta definită de vectorul care unește originea cu afixul lui z. Două observații importante: 1° Argumentul lui $z = 0$ este nedeterminat, în sensul că-i putem atribui orice valoare dorim; 2° Argumentul unui număr complex $z \neq 0$ este și el nedeterminat, în sensul (diferit de cel anterior) că dacă φ este o valoare a argumentului lui z, atunci orice număr de forma $\varphi + 2k\pi$ (unde k este un număr întreg oarecare) este de asemenea argument al lui z. În legătură cu aceste fapte este important să ne folosim de o reprezentare geometrică și de o reprezentare trigonometrică; recapitularea secțiunilor respective din manualul de geometrie și trigonometrie pentru clasa a X-a (Forma trigonometrică a unui număr complex, operații cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică, rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex, ecuații binome, aplicații ale numerelor complexe în geometrie) este necesară.

Numerele complexe au apărut în secolul al XVI-lea și au avut nevoie de o perioadă de aproximativ 200 de ani pentru a fi acceptate și pentru a căpăta o utilizare generală. Atît de familiara reprezentare geometrică a numerelor complexe a apărut tîrziu, fiind legată și de numele lui Karl Friedrich Gauss, care observa în 1831 că în această reprezentare geometrică se află semnificația intuitivă a rădăcinii pătrate a unității negative și motivația pe baza căreia numerele complexe pot fi admise ca obiecte aritmetice. Faptul că mari matematicieni ca Descartes, Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss și Cauchy au putut lucra cu numere complexe așa cum au lucrat cu numere negative și cu numere iraționale, într-o perioadă în care nu se cunoșteau definițiile riguroase de azi ale acestor numere arată că matematica poate progresa și pe baza unor descrieri intuitive ale unora dintre obiectele ei iar rigoarea este un deziderat care are un caracter istoric, deci se află într-o continuă variabilitate.

Definiția numerelor complexe sub formă de perechi ordonate de numere reale a fost introdusă în 1837 de către Hamilton, dar fundamentarea lor n-a putut veni decît ulterior, după ce Cauchy, Cantor, Dedekind și Weierstrass au precizat statutul numerelor reale.

Numerele complexe au fost introduse nu dintr-o simplă dorință de a extinde conceptul de număr, ci pentru că matematica, mecanica și fizica aveau nevoie de aceste numere. În funcție de aceste motivații trebuie urmărite toate desfășurările privind numerele complexe.

LIMITA UNEI FUNCȚII

VECINĂTĂȚI ȘI APROPIERE

Șirul este, după cum se știe, un caz particular de funcție: cazul în care mulțimea de definiție este mulțimea numerelor naturale (sau o parte a ei). Ar urma deci ca noțiunea de limită a unui șir să fie o particularizare a noțiunii de limită a unei funcții. Va trebui, de asemenea, se ne întrebăm care ar fi corespondentul la funcții al noțiunii de convergență a unui șir.

Ori de cîte ori se introduce o noțiune nouă, trebuie să ne întrebăm în legătură cu ce problemă se face aceasta. În ceea ce privește noțiunea de limită a unei funcții într-un punct, problema este următoarea: Ce tendință manifestă valorile unei funcții atunci cînd valorile argumentului ei se apropie de un anumit punct? Chiar din modul în care este formulată întrebarea, înțelegem că trebuie să dăm un sens precis ideii de apropiere de un anumit punct. În același timp, înțelegem că nu ne va interesa valoarea funcției în punctul de care ne apropiem, ci numai în punctele vecine cu el.

Ideea de apropiere de un anumit punct este exprimată matematic cu ajutorul noțiunilor de *vecinătate* și de punct de *acumulare*. O vecinătate a unui punct a din R este prin definiție o mulțime V_a care conține un interval centrat în a, deci de forma $(a - \delta, a + \delta)$, unde $\delta > 0$. Ne putem deci reprezenta o astfel de vecinătate ca o reuniune a unui interval centrat în a cu o mulțime arbitrară din R. Este deci clar că, în funcție de mărimea lui δ, vecinătatea poate fi mai mică sau mai mare. Un punct va fi cu atît mai aproape de a cu cît se va afla într-o vecinătate mai mică a lui a. În acest fel putem exprima ce anume înseamnă că un punct a din R este *oricît de apropiat* de o mulțime A din R. Aceasta înseamnă că în *orice* vecinătate a lui a există măcar un punct din A altul decît a (în ipoteza că a ar aparține lui A). Spuneam în acest caz că a este un *punct de acumulare* (pe scurt: *p. a.*) pentru A. Mulțimea punctelor de acumulare pentru A se notează cu A′ și se numește derivata lui A.

Scenariul acestei situații revine la un joc cu doi parteneri, unul care propune diferite vecinătăți ale lui a și altul care testează existența în vecinătățile respective a cîte unui punct din A diferit de a. Cum însă un punct admite o infinitate de vecinătăți, jocul își găsește dezlegarea numai dacă reușim să reducem această infinitate de variante la un număr finit (cît mai mic posibil) de cazuri distincte. Din fericire, de multe ori acest număr este egal cu unu. Să luăm, de exemplu, mulțimile $A = (0,1)$, $B = \{x;\ x$ rațional strict cuprins între 0 și 1$\}$, $C = \{\ldots, -1/(n+1), -1/n, \ldots, 0, \ldots, 1/n, 1/(n+1), \ldots\}$, $D = \{+1/n;\ n = 1, 2, \ldots\}$. Numărul zero este un punct de acumulare pentru fiecare dintre mulțimile A, B, C și D. Orice interval $(-\delta, \delta)$ cu $\delta > 0$ are comun cu A intervalul $(0, \delta)$, deci originea este p.a. pentru A. Dacă reținem din $(0, \delta)$ punctele raționale, obținem intersecția (infinită) a lui $(-\delta, \delta)$ cu B, deci 0 este p.a. pentru B. În intersecția lui C cu $(-\delta, \delta)$ intră atît zero cît și toate numerele (o infinitate!) de forma $+1/n$ pentru care n întrece pe $1/\delta$ iar dacă lăsăm deoparte pe zero obținem intersecția (infinită) dintre D și $(-\delta, \delta)$. Observăm că, în toate cele patru cazuri, raționamentul a fost valabil *indiferent de valoarea pozitivă a lui* δ, deci procedeul prezentat este valabil pentru toate vecinătățile originii; infinitatea de posibilități a putut astfel să fie redusă la un tip unic.

DIN NOU INFINITATEA ESTE INEVITABILĂ

Cel puțin două observații sînt necesare în legătură cu noțiunea de punct de acumulare. În primul rînd constatăm că *punctul de acumulare poate să aparțină sau să nu aparțină mulțimii*; astfel, zero aparține mulțimii C, dar lipsește din mulțimile A, B și D. În al doilea rînd, chiar din definiția dată noțiunii de p.a. rezultă că de fapt *în orice vecinătate a unui p.a. a pentru* A *se află o infinitate de puncte* din A. Într-adevăr, pentru fiecare submulțime B finită a lui A care se află în vecinătatea $(a-\delta, a+\delta)$ lui a și nu conține pe a, putem alege o vecinătate suficient de mică a lui a, pentru ca ea să lase afară mulțimea B; însă această nouă vecinătate a lui a va trebui la rîndul ei să conțină măcar un punct din A. De altfel, în cele patru exemple de mai sus s-a putut vedea la ce revine efectiv această infinitate. Corolarul imediat al acestei situații este faptul că *o mulțime finită nu admite nici un punct de acumulare* sau,

altfel exprimat: *Dacă o mulțime admite măcar un punct de acumulare, atunci ea este infinită.*

Este interesant să ne întrebăm dacă reciproca ultimului enunț e adevărată: Din faptul că o mulțime de numere reale este infinită rezultă că admite cel puțin un p.a.? Răspunsul negativ la această întrebare este dat de mulțimea numerelor naturale. Însă chiar acest exemplu ne sugerează cum putem depăși dificultatea; intuitiv sesizăm faptul că *mulțimea N a numerelor naturale se acumulează la* $+\infty$. Putem exprima aceasta în mod precis, spunînd că *în orice vecinătate a lui* $+\infty$ *se află numere naturale*; prin vecinătate a lui $+\infty$ înțelegem aici orice mulțime care conține un interval infinit de forma $(a, +\infty) = \{x;\ x > a\}$. Însă $+\infty$ nu este un număr real, deci expresia „vecinătate a lui $+\infty$" nu trebuie luată ad litteram. În mod asemănător, mulțimea întregilor negativi se acumulează la $-\infty$ iar mulțimea tuturor numerelor întregi se acumulează atît la $-\infty$ cît și la $+\infty$.

Toată această pregătire relativă la puncte de acumulare a fost necesară pentru a înțelege în ce fel de puncte se pune problema limitei unei funcții, deci, în particular, și a unui șir. *Fiind dată o mulțime A de numere reale și o funcție f care aplică pe A în R, problema limitei lui f se pune în orice p.a. pentru A și numai în aceste puncte* (includem aici și posibilitatea ca p.a. să fie $-\infty$ sau $+\infty$). Înțelegem în acest fel de ce pentru șiruri problema limitei se pune pentru $n \to \infty$ și nu în $n = 3, n = 7$ sau $n = 1214$, care *nu* sînt p.a. pentru N. Pentru o funcție ca aceea logaritmică putem pune problema limitei în origine (deși logaritmul lui zero n-are sens), deoarece originea este un p.a. pentru intervalul $(0, +\infty)$ pe care se definește logaritmul. Pentru considerente de același fel este interesant să punem problema limitei funcției tangentei trigonometrice în punctul $\pi/2$ și problema limitei lui $1/x$ în origine. Pentru o funcție reală definită pe mulțimea Q a numerelor raționale are sens să punem problema limitei ei în orice punct real (fie el rațional sau irațional), același lucru fiind valabil și pentru o funcție definită pe mulțimea numerelor irraționale; într-adevăr, orice punct rațional (irațional) este un p.a. pentru mulțimea numerelor irraționale după cum orice punct irațional este un p. a. pentru Q. *Dacă însă o funcție este definită pe o mulțime finită, atunci problema limitei nu se pune în nici un punct,* deoarece, după cum am văzut mai sus, o mulțime finită nu admite nici un punct de acumulare. Apare astfel din nou, cu putere, faptul că *Analiza matematică este organic legată de ideea de infinit.*

Dacă am înțeles bine fenomenul de acumulare a unei mulțimi într-un anumit punct, putem spune că am depășit principala deficultate în înțelegerea ideii de limită a unei funcții într-un punct, deoarece definiția acesteia se reduce la aceea cunoscută, a limitei unui șir. Într-adevăr, fie o funcție $f: D \subset R \to R$ și un punct a din R de acumulare pentru D. Există cel puțin un șir $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. A spune că f are limita d în a sau că f tinde către d cînd x tinde la a înseamnă a afirma că pentru orice șir $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ care tinde către a (unde fiecare x_n aparține lui D, dar este diferit de a) șirul de termen general $f(x_n)$ tinde către d (aici d este sau număr real sau unul dintre simbolurile $-\infty$, $+\infty$). Desigur, există o infinitate de șiruri (x_n) de tipul de mai sus deci, dacă ar trebui ca pentru fiecare astfel de șir în parte, să procedăm la o investigație separată, verificarea îndeplinirii condiției din definiția limitei unei funcții nu s-ar încheia niciodată. Din fericire, în cele mai multe cazuri uzuale aceste șiruri se repartizează într-un număr finit, relativ mic, de tipuri, de obicei unul, două sau trei tipuri. Astfel, pentru funcția $f(x) = 1/x$ definită pe $(0,1)$ limita lui $1/x_n$ este plus infinit pentru *orice* șir x_n tinzînd la zero. Pentru $f(x) = 1/x$ definită pe $R - \{0\}$ studiul limitei în origine ne obligă la considerarea separată a două tipuri de șiruri care tind la zero, după cum termenii x_n ai șirului sînt toți negativi sau toți pozitivi. Se observă că pentru primul tip șirul de termen general $f(x_n)$ tinde la $-\infty$, în timp ce, pentru al doilea $f(x_n)$ tinde la $+\infty$, deci f nu admite limită în origine (admițînd însă limită la stînga și limită la dreapta). Pentru $f(x) = 1/x^2$ dacă $x < 0$ și $1/x$ dacă $x > 0$, definită deci pe $R - \{0\}$, sîntem obligați să considerăm trei tipuri de șiruri care tind la zero, după cum termenii șirului sînt: toți, de la un anume rang, pozitivi; toți, de la un anume rang, negativi; sau conțin o infinitate de termeni pozitivi și o infinitate de termeni negativi. Se constată ușor, că de orice tip ar fi șirul (x_n), șirul $(f(x_n))$ tinde la $+\infty$, deci f tinde la $+\infty$ în origine.

Există patru tipuri de limită a unei funcții într-un punct, după cum punctul este sau nu aruncat la infinit și după cum valoarea limitei este un număr real sau simbolul $+\infty$ sau $-\infty$. Oricare dintre aceste tipuri poate fi exprimat în limbaj de șiruri. Cazul particular de funcție pe care-l constituie șirurile nu cunoaște decît două dintre cele patru tipuri, corespunzătoare punctului aruncat la plus infinit,

valoarea limitei putînd fi finită sau infinită. Într-adevăr, după cum am văzut, un șir este o funcție definită pe mulțimea numerelor naturale, mulțime care nu admite nici un punct de acumulare la distanță finită.

Nu este greu de văzut, prin exemple, posibilitatea ca limita să existe, finită sau infinită, în puncte de acumulare care aparțin sau nu aparțin mulțimii de definiție a funcției. În exemplele date mai sus am întîlnit funcții care admit limită infinită sau nu admit limită deloc într-un punct de acumulare în care funcția nu este definită. Nu este greu să ilustrăm și celelalte posibilități. Dacă adăugăm mulțimii de definiție a funcțiilor de mai sus și originea, atunci, indiferent de valoarea atribuită funcțiilor în origine, situația limitei în origine nu se modifică, deoarece definiția limitei unei funcții într-un punct nu depinde în nici un fel de valoarea funcției în punctul respectiv. Funcția egală cu zero în toate punctele din R, cu excepția originii, unde nu este definită sau are o valoare diferită de zero, are limita egală cu zero în origine.

Desigur, dacă studiul oricărei limite ar trebui să procedeze după definiție, prin examinarea diferitelor șiruri care tind către punctul considerat, soluția ar fi de multe ori greoaie și s-ar complica de îndată ce funcția considerată se complică. Din fericire, dispunem de o serie de teoreme care permit să se stabilească anumite reguli generale de obținere a limitei unei funcții f din limite ale unor funcții mai simple, de îndată ce funcția f se obține din aceste funcții mai simple prin anumite operații, în primul rînd prin operațiile algebrice elementare. Operația de trecere la limită se dovedește a fi permutabilă cu operațiile de adunare, scădere, înmulțire și împărțire, în condiții precizate de anumite teoreme. Într-o exprimare mai puțin riguroasă dar mai sugestivă, aceste teoreme afirmă că limita sumei este egală cu suma limitelor, limita diferenței este egală cu diferența limitelor, limita unui produs este egală cu produsul limitelor factorilor iar limita unui raport este egală cu raportul limitelor numărătorului și numitorului (aceasta din urmă nenulă).

VARIETATEA SITUAȚIILOR

În numeroase situații practice sîntem confruntați cu funcții date sub forma unui raport a două expresii, trebuind să se studieze limita în puncte în care expresia de la numitor se anulează. Un caz tipic în acest sens este cel al funcțiilor

raționale, de forma $P(x)/Q(x)$ unde $P(x)$ și $Q(x)$ sînt polinoame. Aici se observă elasticitatea noțiunii de limită. Faptul că expresia $f(x) = (3x + 1)/(1-2x)$ nu este definită pentru $x = 1/2$ nu ne împiedică să studiem limita funcției corespunzătoare în punctul 1/2. Numărătorul este pozitiv în vecinătatea acestui punct, dar numitorul este pozitiv la stînga lui 1/2 și negativ la dreapta lui 1/2. Rezultă că $f((1/2) - 0)$, adică limita la stînga a lui f în 1/2, este $+ \infty$, în timp ce $f((1/2) + 0) = - \infty$. Dacă, dimpotrivă, ne interesează limita lui f nu în punctul în care se anulează numitorul, ci în punctul în care se anulează numărătorul, deci în $-1/3$, atunci situația este aceeași la stînga ca și la dreapta, limita fiind egală cu zero. După cum se știe, pentru o funcție rațională oarecare se pot formula reguli generale, în funcție de anularea sau neanularea numitorului și în funcție de relația dintre gradul numărătorului și cel al numitorului, pentru stabilirea comportamentului la limită, fără deci a mai fi nevoie să procedăm de la definiție. În această privință, a unor reguli mai generale de trecere la limită, un rol special îl are derivata, dar despre aceasta vom discuta cu o altă ocazie.

Este important, pentru a se înțelege mai bine ideea de limită, să observăm varietatea situațiilor în care limita nu există. Cazul mai puțin grav este cel întîlnit mai sus, în care limita nu există, dar limitele la stînga și la dreapta există și sînt egale cu $+ \infty$, respectiv $- \infty$. O situație similară poate avea loc cu limite laterale finite; de exemplu, funcția egală cu -1 pentru $x < 0$ și cu $+1$ pentru $x > 0$ are în origine limita la stînga egală cu -1 iar la dreapta cu $+1$. Un caz mai grav este acela în care limita sau limitele laterale nu există. Un exemplu tipic în această privință îl constituie funcția $\sin(1/x)$, la care pentru orice valoare a cuprinsă între -1 și $+1$ există un șir x_n tinzînd la zero din stînga și un șir y_n tinzînd la zero din dreapta, astfel încît $f(x_n)$ și $f(y_n)$ să tindă la a (de fapt, avem chiar $f(x_n) = f(y_n) = a$ pentru orice n). Unele funcții dintre cele mai uzuale pun probleme interesante de limită în puncte în care ele nu sînt definite. Astfel, logaritmul are limita la dreapta în origine egală cu $- \infty$ Tangenta trigonometrică nu este definită în $\pi/2$, dar are limita la stînga egală cu $- \infty$ iar limita la dreapta egală cu $+ \infty$. Sinusul și cosinusul nu au limită cînd argumentul tinde la $+ \infty$.

O situație specială o prezintă, în probleme de limită, funcțiile definite prin acolade, cu alte cuvinte funcțiile care, pe diferite părți ale mulțimii de definiție, au expresii diferite. În astfel de cazuri, o atenție specială trebuie acordată puncte-

lor care delimitează zone în care funcția este reprezentată diferit; de exemplu, la o funcție ca aceea egală cu sin x pentru $x \leqslant 0$ și cu sin $(1/x)$ pentru $x > 0$, punctul delicat este originea, deoarece ea delimitează cele două zone în care funcția e reprezentată diferit. Situația impune studiul separat al limitei, la stînga și la dreapta, în origine. Însă nu totdeauna statutul punctelor de delimitare a unor astfel de zone este suficient de simplu pentru a-l putea folosi. Într-adevăr, s-ar putea ca aceste zone să nu fie intervale, ci mulțimi de o natură mai complicată. Să considerăm, de exemplu, funcția lui Riemann, egală cu zero în punctele iraționale și cu $1/q$ în punctul rațional p/q, unde p și q sînt întregi primi între ei și $q > 0$. Deoarece în orice interval există atît numere raționale cît și numere iraționale, putem spune că orice punct separă cele două zone. Limbajul șirurilor este în astfel de cazuri foarte comod pentru studiul existenței și valorii limitei într-un punct oarecare. Ne putem apropia de acest punct în trei feluri; prin puncte raționale; prin puncte iraționale; prin puncte de ambele feluri. În puncte de primul tip funcția ia valori de forma $1/q$. Însă pentru o valoare fixată a numărătorului p există doar un număr finit de numere raționale p/q în care q să fie inferior unei valori date. Rezultă că dacă (x_n) este un șir de numere raționale tinzînd la x, $x_n \neq x$, $x_n = p_n/q_n$, atunci $\lim q_n = +\infty$, deci $\lim f(x_n) = \lim (1/q_n) = 0$. Dacă y_n este un șir de numere iraționale tinzînd la x, atunci $f(y_n) = 0$ pentru orice n, deci din nou $\lim f(y_n) = 0$. Rezultă că și pentru șiruri convergente (z_n) care conțin o infinitate de termeni raționali și o infinitate de termeni iraționali avem $\lim f(z_n) = 0$. Cu aceasta am demonstrat că funcția lui Riemann admite în orice punct limita egală cu zero.

VERSIUNEA EPSILON-DELTA

Există totuși cazuri în care folosirea șirurilor nu aduce nici o simplificare, fiind mai comodă, cel puțin grafic, definiția limitei în limbajul epsilon-delta. Un caz tipic în această privință este funcția $f(x) = 1/x^2$ pentru $x \neq 0$. Calea obișnuită în astfel de cazuri constă în a porni de la inegalitatea în epsilon care trebuie stabilită și a deduce de aici ce condiție trebuie să îndeplinească argumentul. Avem $1/x^2 > \varepsilon$, deci $x^2 < 1/\varepsilon$; putem deci lua în rolul lui δ pe $1/\sqrt{\varepsilon}$, astfel încît din $-\delta < x < \delta$ rezultă $f(x) > \varepsilon$, cu alte cuvinte limita funcției în origine este $+\infty$.

Dacă am fi procedat prin şiruri, ar fi trebuit să stabilim că din $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, rezultă $1/x_n^2 \to +\infty$, ceea ce ar fi implicat un raţionament cu inegalităţi după definiţia limitei infinite a unui şir.

Să examinăm mai îndeaproape versiunea epsilon-delta a limitei unei funcţii. Funcţia f, definită într-o vecinătate a lui a din R (cu excepţia eventuală a punctului a) are ca limită numărul real λ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît din $|x - a| < \delta$, x diferit de a, rezultă $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$. Scenariul acestei situaţii implică doi parteneri şi este, ca şi cel anterior, de tipul punerii la încercare. Primul partener propune valori ale lui $\varepsilon > 0$ iar al doilea testează existenţa unui $\delta > 0$ cu proprietatea cerută. Toată dibăcia primului partener constă în a identifica, după un număr finit, cît mai mic, de încercări, un $\varepsilon > 0$ căruia celălalt partener nu-i poate face faţă. Primul partener are o strategie sigură de cîştig dacă şi numai dacă funcţia nu are ca limită pe λ în a. Cel de al doilea partener (considerat, ca şi primul, capabil să utilizeze toate avantajele care-i stau la dispoziţie) dispune de o strategie de cîştig dacă şi numai dacă funcţia are în a limita egală cu λ. Am putea spune, folosind metaforic o terminologie din teoria matematică a jocurilor, că ne aflăm în faţa unui joc de sumă nulă, în sensul că unul dintre jucători cîştigă exact atunci cînd celălalt pierde. Nu este însă riguros determinat numărul de „mutări" pe care trebuie să le efectueze jucătorii, pentru ca jocul să fie decis în favoarea unuia sau altuia dintre parteneri, cu alte cuvinte nu se poate preciza, de o manieră generală, cîte tipuri de valori ale lui epsilon trebuie testate.

Există însă funcţii la care nu se poate anticipa sau măcar bănui valoarea eventuală a limitei sau pentru care, pur şi simplu, nu interesează această valoare în problema în discuţie ci numai faptul că ea există. Exemple de acest fel sînt: limita în origine a lui $(\sin x)/x$; limita pentru $x \to \infty$ a lui $(1 + 1/x)^x$; limita pentru $n \to \infty$ a lui $(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) - \ln n$; limita pentru $n \to \infty$ a lui $\sqrt[n]{n}$. Cu excepţia celui de al treilea exemplu (studiat de Euler, care a arătat că limita respectivă există, finită — denumită azi constanta lui Euler, despre care însă nu se ştie dacă este un număr raţional şi nici măcar dacă este un număr algebric), aceste exemple sînt cunoscute din manualul de liceu. Ele au toate în comun faptul că existenţa şi valoarea limitei nu se impun cu evidenţă intuiţiei.

Ne trebuie deci o versiune a noțiunii de limită a unei funcții într-un punct care să nu presupună intuirea prealabilă a valorii limitei. În acest caz, definiția s-ar exprima în modul următor: Funcția $f : D \to R$ are limită finită în punctul a din R de acumulare pentru D dacă există un număr real λ astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că din $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, $x \in D$, rezultă $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$.

Același fapt poate fi exprimat și în limbaj de șiruri, în modul următor: Există un număr real λ astfel încît din $x_n \to a$, $x_n \neq a$, $x_n \in D$, rezultă $f(x_n) \to \lambda$. Putem elimina cu totul referirea explicită la λ, anume: Funcția $f: D \to R$ are limită finită în punctul a de acumulare pentru D dacă oricum ne-am da două șiruri $x_n \to a$, $y_n \to a$, cu x_n și y_n în D, $x_n \neq a \neq y_n$ pentru orice n natural, șirurile $(f(x_n))$ și $(f(y_n))$ sînt convergente și $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$.

Dar imediat se pune problema posibilității de a exprima convergența unui șir fără implicarea valorii limitei șirului. La această chestiune dă răspuns criteriul de convergență al lui Cauchy: Un șir numeric (a_n) este convergent dacă și numai dacă fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $n(\varepsilon)$ cu proprietatea că din $p > m > n(\varepsilon)$ rezultă $|a_p - a_m| < \varepsilon$. Caracterul necesar al acestei condiții este imediat. Într-adevăr, dacă șirul (a_n) are limită finită, fie ea λ, atunci $|a_p - a_m| = |a_p - \lambda + \lambda - a_m| \leqslant |a_p - \lambda| + |a_m - \lambda| < 2\varepsilon$ de îndată ce m și p sînt suficient de mari. Suficiența condiției se stabilește ceva mai greu și nu o vom examina aici. Dar putem construi imediat analogul la funcții (numit de obicei criteriul Cauchy-Bolzano) al teoremei de mai sus: O funcție f: $[a, b) \to R$ are limită finită (la stînga) în b dacă și numai dacă fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $b(\varepsilon)$ situat între a și b, astfel încît din $b(\varepsilon) < x < y < b$ să rezulte $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ (în această formulare b poate fi, eventual, $+\infty$). O teoremă similară se enunță pentru f $(a, b] \to R$, în ceea ce privește limita finită la dreapta în a (care poate fi $-\infty$).

Putem astfel spune că am identificat analogul la funcții al fenomenului de convergență de la șiruri; este proprietatea unei funcții de a avea limită finită pentru $x \to \infty$. Mai general, putem spune că este proprietatea unei funcții de a avea într-un punct a, din R sau de la infinit, limită (eventual unilaterală) finită. Analogia poate fi urmărită mai departe. Ne putem întreba ce teoremă corespunde la funcții

teoremei care afirmă că orice şir monoton şi mărginit este convergent. Răspunsul este imediat: O funcţie monotonă şi mărginită pe $D \subset R$, cu valori în R, are limite finite unilaterale în orice punct de acumulare al mulţimii D. Într-adevăr, să presupunem, pentru a fixa ideile, că f este crescătoare şi fie a un p.a. pentru D. Fiind dat un şir $x_n \in D$ tinzînd crescător către a, şirul $(f(x_n))$ va fi crescător (datorită faptului că f e crescătoare pe D). Din faptul că f este mărginită, rezultă că acest şir este şi mărginit deci, conform teoremei cunoscute de la şiruri, el este convergent. Dar nu este greu de văzut că de aici rezultă că pentru două şiruri crescătoare diferite $x_n \in D$, $y_n \in D$, $x_n \to a$, $y_n \to a$, $x_n \neq a \neq y_n$, şirurile $(f(x_n))$ şi $(f(y_n))$ au aceeaşi limită finită. Într-adevăr, în cazul contrar, prin alternarea adecvată a şirurilor (x_n) şi (y_n) am obţine un şir crescător (z_n) tinzînd către a, $z_n \in D$, $z_n \neq a$, cu proprietatea că şirul $(f(z_n))$ este divergent (deoarece admite două subşiruri care au limite diferite). Trecerea de la şiruri crescătoare la şiruri arbitrare din D care tind către A dinspre stînga se face ţinîndu-se seama de faptul că orice şir de numere reale admite un subşir monoton. Am demonstrat astfel că funcţia f are limită la stînga finită în a. În mod asemănător se arată că ea are şi limită la dreapta finită în a.

Teorema de mai sus este de o largă utilizare, atît în varianta şirurilor cît şi în aceea a funcţiilor monotone oarecare. În multe situaţii dificile, această teoremă ne scuteşte de a mai merge la definiţia epsilon a limitei. Astfel, pentru stabilirea convergenţei şirului $(1 + 1/n)^n$ este suficient de arătat că acest şir e crescător şi mărginit (chiar acest fapt nu este foarte simplu). Este vorba aici de faimosul şir avînd ca limită numărul e, baza logaritmilor naturali. De asemenea, va fi suficient să stabilim că o funcţie este crescătoare pentru a deduce că ea admite limite la stînga şi la dreapta în fiecare punct. Să considerăm, de exemplu, funcţia f definită pe $[0, 1]$ prin $f(x) =$ suma seriei avînd ca termeni toate numerele de forma $1/2^n$, pentru acele valori ale lui n pentru care într-un şir (r_n) format în prealabil cu toate numerele raţionale din $[0, 1]$, numărul r_n este inferior lui x. Datorită faptului că termenii seriei sînt toţi pozitivi, rezultă că f e crescătoare, deci conform celor stabilite are limită la stînga şi la dreapta în fiecare punct din $[0, 1]$.

Problemele legate de limita unei funcții într-un punct sînt numeroase și delicate. Este natural să fie așa, deoarece este vorba de una dintre noțiunile de bază ale Analizei matematice. Tocmai de aceea ea reclamă o familiarizare treptată, un studiu îndelung, în care aspectele teoretice și cele practice să fie tot timpul solidare.

CONTINUITATEA, O PROPRIETATE DERUTANTĂ

DOUĂ MOMENTE ÎN EVOLUȚIA IDEII DE CONTINUITATE

Cronologic, conceptul de continuitate este ulterior celui de derivată; logic, însă, îl precede. Derivata este, am putea spune, personajul principal al Calculului diferențial, tot așa cum integrala este personajul principal al Calculului integral. Derivata și integrala au avut de la început o interpretare geometrică și fizică directă, ele constituiau pentru Newton și Leibniz modele matematice ale unor realități cu un conținut intuitiv precis. Nu același lucru se poate spune despre continuitate, în ciuda faptului că termenul ca atare face imagine. Proprietatea de continuitate a apărut în Analiza matematică nu la contactul ei direct cu realitatea empirică, ci în laboratorul de lucru al matematicianului, din necesități interne, de ordin teoretic.

Două momente importante au marcat (după Cauchy) evoluția înțelegerii ideii de continuitate. În 1872, Weierstrass a șocat lumea matematică prin exemplul său de funcție continuă în orice punct din R, dar nederivabilă în nici un punct. În 1905, Émile Picard comenta ironic acest fapt, observînd că dacă Newton și Leibniz ar fi știut de existența unei funcții ca aceea a lui Weierstrass, calculul diferențial n-ar mai fi fost creat. Să ne bucurăm deci că exemplul lui Weierstrass a venit suficient de tîrziu pentru a nu împiedica dezvoltarea unui capitol important al matematicii! Pînă la Weierstrass, se credea că derivabilitatea este o consecință a continuității, de aceea nici nu prea se vorbea de derivabilitate, ci de derivată (derivabilitatea fiind considerată echivalentă cu continuitatea). În manualele de matematici din secolul al XIX-lea, inclusiv manualele scrise de mari matematicieni, se „demonstra" ceea ce astăzi atrage căderea la examen: continuitatea implică derivabilitatea. Marele Cauchy nu făcea distincție între continuitate și derivabilitate; mai precis, nu bănuia că una dintre aceste proprietăți ar putea avea loc în absența celeilalte.

Al doilea moment important în clarificarea ideii de continuitate este anul 1875, cînd Gaston Darboux dă un exemplu

de derivată discontinuă, arătînd totodată că orice derivată are proprietatea valorii intermediare (numită azi proprietatea lui Darboux): Nu se poate trece de la o valoare la alta fără a se parcurge toate valorile intermediare. Pînă la Darboux, matematicienii erau convinşi că proprietatea de continuitate este echivalentă cu proprietatea valorii intermediare; chiar termenul de *continuitate* îşi are explicaţia în această interpretare. Într-adevăr, proprietatea lui Darboux constă în faptul că funcţia nu poate „sări" de la o valoare la alta, trecerea trebuind să se facă în mod continuu (aici, cuvîntul *continuu* fiind folosit în accepţiunea sa intuitivă). Dar, aşa cum, confundînd continuitatea cu derivabilitatea, Cauchy şi alţi mari matematicieni nu se înşelau decît pe jumătate, deoarece derivabilitatea implică proprietatea de continuitate, confuzia dintre continuitate şi proprietatea lui Darboux conţinea şi ea jumătate de adevăr, deoarece continuitatea implică proprietatea lui Darboux.

Prin clarificările aduse de Weierstrass şi Darboux, devenea clar că intuiţia proprietăţii matematice de continuitate este foarte înşelătoare, o adevărată capcană care urma să fie depăşită abia în secolul nostru, prin perfecţionarea şi rafinarea instrumentelor Analizei. O literatură considerabilă privind proprietăţile de continuitate, derivabilitate şi proprietatea lui Darboux a permis să se precizeze statutul acestora, gradul lor de independenţă şi de condiţionare reciprocă.

VARIANTE ALE CONTINUITĂŢII

Desigur, un elev bun de azi se poate întreba dacă într-adevăr este mai deştept decît a fost Cauchy în secolul trecut, deoarece elevul de azi, chiar fără un talent deosebit, dar care se pregăteşte conştiincios, nu confundă continuitatea cu derivabilitatea. Însă fiecare perioadă istorică îşi are inteligenţa şi cultura ei, limitele ei de înţelegere şi de informaţie, care marchează activitatea intelectuală a fiecarui individ, fie el cît de genial, care trăieşte în epoca respectivă. Într-un anume sens, deci, putem spune că absolventul de liceu din 1985 îi întrece pe Pitagora şi pe Tales, pe Leibniz şi pe Cauchy, deoarece secolul 20 a acumulat mai multă informaţie şi mai multă inteligenţă decît oricare dintre secolele anterioare.

Este momentul să ne amintim cum ne apare azi ideea de continuitate. Există mai multe moduri de a o prezenta, dintre care vom aminti aici cîteva.

a) Fie o funcție $f \quad A \subset R \to R$ și fie x în A. Funcția f este continuă în x dacă pentru orice șir (x_n) tinzînd către $x (x_n \in A,\ n = 1, 2, \ldots)$ șirul $(f(x_n))$ tinde către $f(x)$.

b) Cu aceleași notații, f este continuă în x din $A \cap A'$ dacă limita lui f în x există și este finită și dacă această limită este egală cu $f(x)$.

c) Cu aceleași notații, f este continuă în x dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît din $|y - x| < \delta$, $y \in A$, rezultă $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

d) Cu aceleași notații, f este continuă în x dacă există un număr real λ astfel încît pentru orice șir (x_n) tinzînd către $x (x_n \in A,\ n = 1, 2, \ldots)$ șirul $(f(x_n))$ tinde către λ.

e) Cu aceleași notații, f este continuă în x dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că din $y \in A$, $y \neq x$, $|y - x_n| < \delta$ rezultă $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

f) Cu aceleași notații, f este continuă în x dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(x)$ există o vecinătate U a lui x astfel încît din $x \in U \cap A$ rezultă $f(x) \in V$

Pe baza celor șase variante de mai sus, putem construi alte variante, înlocuind unele inegalități stricte cu inegalități slabe (deci care permit și egalitatea), dar nu vom mai discuta această problemă, pe care am analizat-o altădată. Faptul că unele dintre aceste variante se vor dovedi echivalente (iar, în anumite împrejurări, vom vedea că *toate* sînt echivalente) nu înseamnă că este indiferent cu care dintre ele lucrăm. Într-o împrejurare concretă, o anumită variantă se poate dovedi mai comodă decît celelalte. Discuția problemei similare privind limita unei funcții într-un punct este orientativă pentru modul în care se pune problema aici.

CONFRUNTAREA VARIANTELOR

Să comentăm acum cele șase definiții de mai sus. Definiția (a) este cunoscută din manualul de clasa a XI-a. Definiția (f) este echivalentă cu definiția (a), așa cum rezultă dintr-o teoremă din manualul de clasa a XI-a. În ceea ce privește definiția (b), ea impune punctului x să fie un punct de acumulare pentru A, ceea ce nu este cazul în definițiile (a) și (f). Într-adevăr, problema limitei unei funcții are sens numai în punctele de acumulare ale mulțimii de definiție a funcției. Rezultă că definițiile (a) și (b) sînt echivalente numai dacă x este un punct de acumulare pentru A. Dacă, de exemplu, A este finită, atunci f este continuă în fiecare punct din A, după definițiile (a) și (f), dar nu este continuă

în nici un punct din A după definiția (b). În schimb, în cazul în care A este un interval deschis, definițiile (a) și (b) sînt perfect echivalente.

Definiția (c) este echivalentă cu definiția (a), dînd sens continuității în toate punctele din A.

Definiția (d) se deosebește de definiția (a) într-o singură privință: în locul valorii $f(x)$ avem numărul λ. S-ar părea că cele două definiții nu pot fi echivalente decît dacă $\lambda = f(x)$. Într-adevăr, așa este, numai că această condiție nu trebuie să fie impusă, adică formulată explicit, deoarece ea este o consecință inevitabilă a formulării (d); unul dintre șirurile (x_n) posibile pentru care $x_n \in A$ și astfel încît $x_n \to x$ este șirul staționar $x_n = x$ pentru $n = 1, 2, \ldots$, șir pentru care $f(x_n) = f(x)$, fapt care obligă pe λ să fie egal cu $f(x)$. Rezultă că definițiile (a) și (d) sînt echivalente.

Rămîne să examinăm definiția (e). Aici deosebim două cazuri. Dacă x este punct izolat al lui A, adică aparține lui $A - A'$, atunci pentru $\delta > 0$ suficient de mic nu există nici un $y \in A$, $y \neq x$, cu $|y - x| < \delta$, deci pentru $\delta > 0$ suficient de mic condițiile menționate pentru y implică inegalitatea $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Intervine aici o situație logică de tipul următor: Dacă o anumită condiție A nu poate fi îndeplinită, atunci enunțul *A implică B* este adevărat oricare ar fi proprietatea B. Un analog mai accesibil al acestei situații este următorul. Este adevărat enunțul *Toți oamenii în vîrstă de peste 330 de ani au o înălțime de peste doi metri*? Răspunsul este afirmativ, deoarece revine la o implicație în care ipoteza nu se realizează niciodată. De fapt, atît în situația din definiția (e) cît și în situația celor de peste 330 de ani este vorba de mulțimea vidă (ale cărei elemente au orice proprietate dorim).

Să vedem acum ce se întîmplă cu definiția (e) dacă x este punct de acumulare pentru A. În acest caz, definiția (e) afirmă existența limitei f în x și egalitatea acesteia cu $f(x)$. În ansamblu, rezultă deci că definiția (e) este echivalentă cu definiția (a), în ciuda aparenței contrare.

Să rezumăm. Variantele (a), (c), (d), (e) și (f) sînt echivalente două cîte două, conducînd toate la o proprietate de continuitate care are sens în orice punct în care funcția este definită și în baza căreia orice funcție este continuă în punctele izolate ale mulțimii de definiție. Varianta (b) conduce la o proprietate de continuitate care nu poate avea loc în punctele izolate ale lui A, dar care, în punctele din A care-s de acumulare pentru A, este echivalentă cu varianta (a). *În cazul*

particular în care A este un interval, A nu mai conține puncte izolate, deci *toate cele șase variante ale continuității sînt echivalente două cîte două.*

CUM PUTEM GREȘI CÎND NU CONTROLĂM CONTINUITATEA

Asimilarea ideii de continuitate este în bună măsură împiedicată de faptul că ea este foarte puțin implicată în practica Analizei matematice. Intervenția ei este implicită, indirectă, intermediarul constituindu-l unele teoreme importante în care apare, între ipoteze, continuitatea. Dar avem grijă să verificăm ipoteza de continuitate, de fiecare dată cînd aplicăm o astfel de teoremă? Să urmărim cîteva exemple în acest sens.

Funcția $f(x) = 1/x$ definită în intervalul deschis $(0,1)$ este continuă în acest interval. O teoremă afirmă că din continuitate rezultă mărginirea funcției, fapt care ne-ar tenta să credem că funcția considerată este mărginită. Însă teorema în cauză se referă la funcții continue pe un interval închis și mărginit, deci care-și conține ambele extremități. Funcția f nu este definită în origine, deci problema continuității în origine nu se pune; dacă am prelungi funcția în origine, atribuindu-i o valoare λ, constatăm că, oricum am alege valoarea lui λ, funcția obținută este discontinuă în origine. Deci nu putem aplica teorema menționată mai sus. De altfel, se vede „cu ochiul liber" că f nu este mărginită pe $(0,1)$.

Funcția f definită prin $f(0) = -1$, $f(x) = x$ pentru $0 < x < 1$, și $f(1) = 2$ este derivabilă pe intervalul deschis $(0,1)$ iar aplicarea teoremei de medie a lui Lagrange (numită și formula creșterilor finite) ne conduce la existența unui punct y în $(0,1)$, astfel încît $f(1) - f(0) = (1 - 0) f'(y)$, deci $f'(y) = 3$, ceea ce este absurd, deoarece $f'(x) = 1$ pentru orice $x \in (0,1)$. Eroarea provine din folosirea necontrolată a teoremei creșterilor finite. Într-adevăr, printre ipotezele care figurează în această teoremă este și aceea a continuității pe intervalul închis și mărginit pe care vrem să aplicăm formula; însă funcția considerată aici nu este continuă nici în origine, nici în $x = 1$, deci nu sînt îndeplinite condițiile pentru aplicarea formulei creșterilor finite.

Să considerăm acum funcția f definită pe $A = (0,2) \cup (3,4)$ prin $f(x) = x$. Această funcție este evident continuă, deci am putea fi tentați să afirmăm că are proprietatea lui Darboux. Însă teorema care afirmă că din continuitate rezultă proprietatea lui Darboux nu este aplicabilă aici, deoarece

această teoremă a fost enunțată și demonstrată *pentru funcții continue pe un interval.* În cazul funcției considerate aici, mulțimea de definiție A nu este un interval, ci o reuniune de două intervale; fapt suficient pentru a face imposibilă aplicarea teoremei. De altfel, se vede „cu ochiul liber" că f nu are proprietatea lui Darboux, deoarece valoarea 2,5 nu este luată de f în nici un punct din A.

O utilizare frecventă a proprietății de continuitate se referă la operația de inversare a unei funcții. O teoremă importantă afirmă că dacă $f : I \to R$ este o funcție continuă și strict monotonă pe intervalul I și $f(I) = J$, atunci aplicația f este injectivă, deci inversabilă iar aplicația inversă $f^{-1}: J \to I$ este de asemenea continuă și strict monotonă. Astfel, dacă $f(x) = x^n$ și $I = [0, \infty)$, în baza continuității și monotoniei (crescătoare) stricte a lui f pe I putem afirmă că funcția inversă, radicalul de ordin n, este și ea continuă și strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Pe baza aceleiași teoreme deducem continuitatea funcției logaritmice din continuitatea funcției exponențiale, a funcțiilor trigonometrice inverse din aceea a funcțiilor trigonometrice directe.

DERIVATA

DERIVATĂ, VITEZĂ, TANGENTĂ, DENSITATE

Introdusă încă în secolul al XVII-lea, concomitent de către Isaac Newton şi G. W. Leibniz, noţiunea de derivată este una dintre cele mai importante din Analiza matematică. Derivata este o descriere matematică a vitezei de variaţie a unei funcţii. Fiind dată o funcţie reală f definită pe intervalul (a, b), variaţia lui f pe intervalul $[x', x'']$ conţinut în (a, b) este diferenţa $f(x'') - f(x')$. Variaţia medie pe acelaşi interval este deci raportul $(f(x'') - f(x'))/x'' - x')$. Această mărime constituie o imagine a vitezei medii de variaţie a funcţiei f pe intervalul $[x,' x'']$, (sau, dacă x'' este inferior lui x', pe intervalul $[x'', x']$). Dacă, de la această imagine relativă la un interval cu o extremitate în x', dorim să trecem la o caracterizare a vitezei variaţiei lui f în punctul x', va fi necesar să cercetăm limita în x' a funcţiei $F(x) = (f(x) - f(x'))/(x - x')$. În cazul în care această limită există, ea se numeşte *derivata* lui f în x'.

Derivata admite diferite interpretări, după natura funcţiei f şi după aspectul pe care dorim să-l punem în evidenţă. Este bine cunoscută interpretarea geometrică, relativă la graficul funcţiei f. Derivata în x exprimă panta sau coeficientul unghiular al tangentei în punctul $(x, f(x))$ la curba reprezentată de graficul lui f. Aceasta înseamnă implicit următorul fapt foarte important: *Existenţa derivatei lui f în x este echivalentă cu existenţa tangentei în punctul $(x, f(x))$, la curba reprezentată de graficul lui f.*

Un alt aspect important al derivatei este cel fizic. Să presupunem că avem o bară materială unidimensională, pe care o asimilăm cu segmentul de dreaptă $[a, b]$. Să notăm cu $f(x)$ masa porţiunii de la a la x $(a \leqslant x \leqslant b)$ a acestei bare. Masa aflată pe porţiunea $[x, y]$ $(a \leqslant x < y \leqslant b)$ este deci egală cu $f(y) - f(x)$. Densitatea medie de repartiţie a masei pe intervalul $[x, y]$ este $(f(y) - f(x))/(y - x)$. Dacă însă vrem să dăm un sens densităţii de repartiţie în punctul x, va trebui să considerăm derivata lui f în x, iar dacă aceasta există, spunem că bara admite densitate punctuală în x.

O altă interpretare posibilă se obține înlocuind masa cu o sarcină electrică; în acest caz, existența densității punctuale de repartiție a sarcinii electrice este echivalentă cu existența derivatei funcției care exprimă sarcina electrică pe un interval.

DERIVABILITATE ȘI DERIVATĂ INFINITĂ

Am văzut că derivata este un caz particular al noțiunii de limită. Dar această limită poate fi incomodă, de aceea se caută să se obțină unele teoreme cu caracter general, privind comportamentul derivatei față de diferite operații. Aici însă trebuie să deosebim între noțiunea de *derivată* și aceea de *derivabilitate*. Derivata este fie un număr real, fie unul dintre simbolurile minus sau plus infinit, în timp ce derivabilitatea nu este un număr, ci o proprietate. Să luăm de exemplu funcția egală cu -1 pentru x negativ, cu 0 pentru $x = 0$ și cu $+1$ pentru x pozitiv. Constatăm că raportul $(f(x) - f(0))/(x - 0)$ este egal cu $1/|x|$, oricare ar fi x diferit de zero, deci derivata în origine a funcției considerate există și este egală cu plus infinit. În toate celelalte puncte, derivata este egală cu zero.

Exemplul de mai sus arată că *o funcție poate avea derivată infinită într-un punct de discontinuitate*; într-adevăr, în origine, funcția considerată este discontinuă. Faptul contrastează cu ceea ce se întîmplă într-un punct în care derivata este finită; aici, continuitatea este obligatorie. Constatăm astfel că între derivata finită și cea infinită nu este numai o diferență de valoare ci și una de structură. Pentru a se marca această deosebire, *punctele în care o funcție admite derivată finită sînt numite puncte de derivabilitate.* O funcție este deci derivabilă într-un punct dacă admite derivata finită în acel punct. *Derivabilitatea implică proprietatea de continuitate.* Într-adevăr, să presupunem că are loc derivabilitatea lui f în punctul c. Dacă ar exista un șir $x_n \to c$ pentru care $f(x_n)$ nu tinde la $f(c)$, atunci raportul din definiția derivatei n-ar mai putea avea limită finită și derivabilitatea ar fi contrazisă. Reciproca teoremei de mai sus nu este adevărată: *Există funcții care admit puncte de continuitate în care funcția nu numai că nu este derivabilă, dar nu admite nici măcar derivată infinită.* Exemplul care se dă de obicei în această privință este $f(x) = |x|$, continuă în orice punct din R, dar neadmițînd în origine nici derivată finită, nici derivată infinită. Se poate însă arăta (aceasta a făcut-o,

pentru prima oară, K. Weierstrass, în secolul trecut) că există funcții continue pe un interval, nederivabile în nici un punct al acestui interval.

O PROBLEMĂ DE APROXIMARE

Calculul diferențial și integral, cum s-a numit multă vreme partea clasică a Analizei matematice, sugerează prin titlul său că are la bază două concepte: diferențiala și integrala. Despre integrală nu vom discuta acum, însă diferențiala este strîns legată de problema derivatei. Am putea spune că derivata era preferința lui Newton (care în loc de derivată folosea termenul de *fluxiune*), în timp ce diferențiala o datorăm lui Leibniz. Despre ce este vorba?

Întreaga problemă a derivatei, așa cum a fost ea privită în paragraful anterior, este problema trecerii de la descrierea globală, integrală a unui fenomen la descrierea sa locală, punctuală, instantanee. De la spațiul parcurs de un mobil la viteza sa în diferite momente, de la masa totală a unei bare la densitatea punctuală a barei, de la distribuția unei sarcini electrice de-a lungul unui fir material la densitatea sarcinii într-un punct sau altul al firului, de la variația unei funcții la panta tangentei în diferite puncte ale graficului funcției, iată exemple variate de trecere de la cunoașterea aspectului global al unui fenomen la cunoașterea sa locală.

Putem însă ajunge la ideea de derivată pornind de la cu totul altă problemă; de la o problemă de aproximare. Să fixăm mai întîi o notație: Vom scrie $f(x) = 0(g(x))$ pentru $x \to a$ dacă $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ și $\lim ((f(x)/g(x)) = 0$ pentru $x \to a$. Aceasta revine la a spune că $f(x)$ tinde la zero mai repede decît $g(x)$ atunci cînd x tinde la a. Într-un limbaj mai vechi, care vine de la Leibniz, aceasta se exprimă spunînd că $f(x)$ este un infinit mic de ordin superior lui $g(x)$. De exemplu, x^2 tinde la zero mai repede decît x, dar x^3 tinde la zero mai repede decît x^2.

Fie acum variația funcției f în punctul x, adică diferența $f(x + h) - f(x)$, care, pentru x fix, devine o funcție $g(h)$ de argumentul h. Funcția g poate fi destul de complicată, chiar atunci cînd f nu este prea complicată. De exemplu, dacă $f(x) = x^3$, $g(h) = (x + h)^3 - x^3 = 3\ x^2\ h + 3\ x\ h^2 + h^3$, deci g este aici mai complicată decît f. O întrebare apare atunci în mod natural: Nu putem aproxima variația $g(h)$ printr-o funcție cît mai simplă de h? Cea mai simplă funcție de h care se poate imagina este funcția lineară și omogenă,

adică de forma ah. Rămîne însă să precizăm în ce condiții vom spune că aproximarea lui $g(h)$ prin ah este satisfăcătoare. Într-o aproximare distingem *funcția aproximată*, aici $g(h)$, *funcția aproximantă* (cu care se face aproximarea), aici ah, și *eroarea* comisă prin aproximarea considerată, adică diferența dintre funcția aproximată și cea aproximantă: $z(h) = g(h) - ah$.

DIFERENȚIABILITATE ȘI DIFERENȚIALĂ

Este clar, în cele de mai sus, că, pentru ca aproximarea să fie acceptabilă, va fi necesar ca eroarea $z(h)$ să tindă la zero odată cu h, cu alte cuvinte, pe măsură ce h se apropie de zero, valoarea funcției aproximante se apropie de valoarea funcției aproximate. Intuiția ne spune însă că, așa cum într-o împărțire restul este inferior împărțitorului, eroarea din procesul nostru de aproximare trebuie să fie „inferioară" funcției aproximante; am pus între ghilimele cuvîntul *inferioară*, deoarece aici, fiind vorba de funcții de h, nu avem inferioritate în sensul inegalității $z(h) < ah$, ci în sensul că $z(h)$ tinde la zero mai repede decît ah, atunci cînd $h \to 0$, cu alte cuvinte, pe baza notației adoptate, $z(h) = 0(ah)$, ceea ce revine la $z(h) = 0(h)$.

Problema în fața căreia ne aflăm se poate deci formula în modul următor: *Fiind dată funcția reală f definită într-o vecinătate a numărului real x, există un număr real a astfel încît funcția de h: $f(x + h) - f(x) - ah$ să tindă la zero mai repede decît h?* Dacă răspunsul este afirmativ, spunem că funcția f este *diferențiabilă* în x iar expresia ah se numește *diferențiala lui f în x*. Să observăm că această diferențială este o funcție reală de două argumente: x și h. Într-adevăr, numărul real a depinde de x, deci ar trebui să scriem diferențiala lui f în x sub forma $h\,a(x)$. N-am făcut-o inițial, deoarece am presupus pe x fixat, dar, evident, x poate fi orice punct în intervalul de definiție al lui f.

Prima observație care se impune acum este aceea a *unicității lui a* cu proprietatea menționată, cu alte cuvinte dacă f este diferențiabilă în x, deci dacă există un număr a astfel încît $f(x + h) - f(x) - ah$ să tindă la zero mai repede decît h, atunci a este unic determinat. Vom deduce această unicitate, stabilind următoarea teoremă: *Dacă f este diferențiabilă în x, atunci f este derivabilă în x iar derivata lui f în x este egală cu a.* Pentru demonstrație, să scriem ipoteza sub forma: Există a real astfel încît $f(x + h) - f(x) - ah =$

$= 0(h)$. Împărțind în ambii membri cu h, obținem $(f(x+h)-f(x))/h = a + 0(h)/h$. Însă chiar din definiția lui $0(h)$ rezultă că $0(h)/h$ tinde la zero odată cu h; deoarece în primul membru al egalității avem chiar raportul din definiția derivatei lui f în x, rezultă că această derivată există și este egală cu a.

Nu este greu de văzut că și reciproca teoremei de mai sus este adevărată: *Dacă f este derivabilă în x, atunci f este diferențiabilă în x iar diferențiala lui f în x se obține înmulțind cu h valoarea derivatei lui f în x.* Într-adevăr, din ipoteza că $\lim ((f(x+h)-f(x))/h) = a$ rezultă că $u(h) = (f(x+h) - f(x))/h - a$ tinde la zero cînd $h \to 0$. Înmulțind cu h ambii membri ai egalității, obținem $hu(h) = f(x+h) - f(x) - ah$ și constatăm că primul membru tinde la zero mai repede decît h. Avem deci $f(x+h) - f(x) - ah = 0(h)$ și teorema este demonstrată.

SURPRIZE ÎN OPERAȚIILE CU FUNCȚII DERIVABILE

Operațiile algebrice cu funcții derivabile conduc tot la funcții derivabile. Cu alte cuvinte, dacă f și g sînt derivabile în x, atunci $f+g$, fg și (dacă $g(x) \neq 0$) f/g sînt funcții de asemenea derivabile în x. Însă, în timp ce derivata sumei este egală cu suma derivatelor (adică $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$), derivata produsului dintre f și g nu este, în general, egală cu produsul derivatelor lui f și g iar derivata raportului f/g nu este, în general, egală cu raportul derivatelor celor două funcții. După cum se știe, avem $(fg)'(x) = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)$ și (pentru $g(x) \neq 0$) $(f/g)'(x) = (g(x)\,f'(x) - g'(x)\,f(x))/g(x))^2$. Nu vom insista asupra acestor fapte, ale căror demonstrații nu prezintă nimic deosebit și se află în manual. Vom discuta însă cea mai importantă teoremă relativă la operații cu derivate, anume teorema de derivare a funcțiilor compuse, care se enunță în modul următor: *Dacă g este o funcție reală derivabilă în x iar f este o funcție reală derivabilă în $g(x)$, atunci funcția compusă $F = f \circ g$ este derivabilă în x și are loc relația $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$*, cu alte cuvinte derivata lui F în x se obține înmulțind derivata lui f în $g(x)$ cu derivata lui g în x.

Pentru demonstrarea teoremei de mai sus, am putea fi tentați să procedăm în felul următor. Scriind

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(g(x+h))-f(g(x)}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

observăm că factorul al doilea din membrul al doilea tinde la $g'(x)$ cînd $h\to 0$. Din derivabilitatea lui g în x rezultă continuitatea lui g în x, deci primul factor din membrul al doilea are ca limită pe $f'(g(x))$ cînd $h\to 0$ (am folosit aici ipoteza de derivabilitate a lui f în $g(x)$). Rezultă că membrul al doilea are ca limită produsul $f'(g(x))\cdot g'(x)$, deci și primul membru are aceeași limită.

Viciul acestei demonstrații constă în posibilitatea ca diferența $g(x+h)-g(x)$ să se anuleze. Totuși, demonstrația poate fi salvată, procedînd la un mic ocol. Avem aici un exemplu în care o demonstrație lacunară conduce la un rezultat corect. Să considerăm un șir (x_n) tinzînd la x, cu $x_n\neq x$ oricare ar fi n. Avem, pentru $g(x_n)$ diferit de $g(x)$ oricare ar fi n,

$$\frac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x}=\frac{f(g(x_n))-f(g(x))}{g(x_n)-g(x)}\cdot\frac{g(x_n)-g(x)}{x_n-x}$$

Datorită ipotezelor de derivabilitate a lui g în x și a lui f în $g(x)$, rezultă că, pentru $n\to\infty$, membrul al doilea tinde la produsul $f'(g(x))\cdot g'(x)$, deci și primul membru are aceeași limită. Vom arăta că pentru un șir $x_n\to x$ cu $x_n\neq x$, dar $g(x_n)=g(x)$ oricare ar fi n, raportul $(F(x_n)-F(x))/(x_n-x)$ are tot limita $f'(g(x))\cdot g'(x)$. Într-adevăr, din $g(x_n)=g(x)$ rezultă că $g'(x)=0$ și că $F(x_n)-F(x)=0$ pentru orice n, deci limita șirului $(F(x_n)-F(x))/(x_n-x)$ este egală cu zero, deci cu produsul $f'(g(x))\cdot g'(x)$ (deoarece, după cum am văzut, factorul al doilea din acest produs este egal cu zero iar primul factor există prin ipoteză).

Ar mai fi de considerat șiruri (x_n) care tind la x astfel încît $x_n\neq x$, dar pentru o infinitate de valori ale lui n avem $g(x_n)=g(x)$ iar pentru o altă infinitate de valori ale lui n avem $g(x_n)$ diferit de $g(x)$. Însă acest caz se reduce la cele două cazuri precedente. Teorema de derivabilitate a funcțiilor compuse este astfel complet demonstrată.

Teorema de derivare a funcțiilor compuse se extinde de la două la mai multe funcții compuse. De exemplu, avem: Dacă h este o funcție reală derivabilă în x, g este derivabilă în $h(x)$ iar f este derivabilă în $g(h(x))$, atunci $F=f\circ g\circ h$ este derivabilă în x și avem $F'(x)=f'(g(h(x))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$. Pe lîngă importanța ei teoretică, teorema are o mare valoare practică, deoarece reduce calculul derivatelor unor funcții complicate la calculul derivatelor funcțiilor mai simple care, prin compunere, conduc la funcția complicată inițială. De exemplu, derivata funcției ln (arc sin $\sqrt{1-x^2}$) definită pentru $-1\leqslant x\leqslant +1$ se va obține prin înmulțirea derivatei logaritmului cu derivata funcției arc sin și cu derivata radicalului.

Un alt punct delicat în ceea ce privește regulile de derivare se referă la derivabilitatea și derivata funcției sinus. Avem $(\sin(x+h)-\sin x)/h=(\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x)/h=(\sin x)(\cos h-1)/h+\cos^2 x.(\sin h)/h$. Însă

$$\frac{\cos h-1}{h}=\frac{\cos^2 h-1}{h}\cdot\frac{1}{\cos h+1}=-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{\cos h+1}$$

deci

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=-\sin x\frac{\sin h}{h}\frac{\sin h}{1+\cos h}+$$

$$+\cos x\frac{\sin h}{h}=\frac{\sin h}{h}\left(\cos x-\sin x\frac{\sin h}{1+\cos h}\right).$$

Pentru $h\to 0$, termenul al doilea din paranteza de mai sus tinde la zero, deoarece numărătorul tinde la zero iar numitorul este supraunitar. Dacă vom arăta că $\lim(\sin h)/h=1$ pentru $h\to 0$, atunci va fi demonstrat faptul că sinusul este o funcție derivabilă iar derivata sa este cosinusul. În acest scop, să observăm că, pentru h pozitiv strict inferior lui $\pi/2$, unghiul h măsurat în radiani este cuprins între sinusul lui h și tangenta trigonometrică a lui h. De aici rezultă imediat că raportul $|h/(\sin h)|$ majorează unitatea și este majorat de o funcție de h care tinde la unu cînd $h\to 0$. De aici se poate deduce că $\lim(\sin h)/h=1$ cînd $h\to 0$.

Ţinînd seamă de modul în care am demonstrat derivabilitatea sinusului, rezultă că nu putem studia limita raportului $(\sin x)/x$, cînd $x \to 0$, prin folosirea teoremei care se prevalează de raportul derivatelor; într-adevăr, în acest fel s-ar crea un cerc vicios, deoarece nu putem demonstra pe B cu ajutorul lui A dacă în prealabil am obţinut pe A cu ajutorul lui B.

CUM ABORDĂM TEOREMELE DE MEDIE?

În foarte multe situaţii, teoretice sau aplicative, derivata intervine prin teoremele de medie în care ea apare sau prin proprietăţile ei structurale, cum ar fi proprietatea lui Darboux, absenţa discontinuităţilor de prima specie şi altele. Este de aceea nevoie să avem o reprezentare clară a teoremelor corespunzătoare, să înţelegem bine condiţiile lor de aplicare.

La originea tuturor faptelor evocate aici se află teorema lui Fermat, după care, *dacă o funcţie are derivată într-un punct de extrem local interior intervalului de definiţie al funcţiei, atunci această derivată este egală cu zero.* Ideea demonstraţiei constă în a evalua separat derivata la stînga şi derivata la dreapta în punctul considerat (lucru posibil, datorită faptului că acest punct este *interior* intervalului de definiţie) şi de a arăta că în timp ce una dintre ele evită semnul plus, cealaltă evită semnul minus; însă cele două derivate sînt egale între ele, valoarea comună fiind derivata în punctul respectiv; de aici, consecinţa inevitabilă a anulării ei. Practic, presupunînd că punctul a considerat este de minim relativ, va exista o vecinătate V a lui a astfel încît, pentru x în V, $f(x)$ este superior lui $f(a)$, deci derivata la stînga a lui f în a va fi nepozitivă iar derivata la dreapta a lui f în a va fi nenegativă. Un raţionament asemănător în cazul maximului relativ. Să observăm cît de esenţială este ipoteza poziţiei *interioare* a punctului a; fără aceasta, demonstraţia n-ar funcţiona, deoarece n-am mai putea acţiona concomitent la stînga şi la dreapta punctului. De altfel, nici nu este greu de văzut, pe un exemplu, că pentru extremităţile intervalului de definiţie nu mai are loc o teoremă de tip Fermat. Într-adevăr, fie funcţia $f(x) = x$ pe intervalul $[0,1]$. Funcţia îşi atinge minimul în extremitatea stîngă a intervalului, fără ca derivata (la dreapta) să se anuleze acolo.

Din teorema lui Fermat rezultă două fapte deopotrivă de importante: teorema lui Rolle şi proprietatea lui Darboux a derivatelor. După cum se ştie, teorema lui Rolle afirmă că fiind dată o funcţie continuă pe intervalul închis $[a, b]$, derivabilă în intervalul deschis (a, b) şi astfel încît $f(a) = f(b)$, există un punct c între a şi b cu $f'(c) = 0$. Ideea demonstraţiei constă în a arăta că există un punct c de extrem relativ pentru f, *situat în interiorul lui* (a, b). Anularea derivatei $f'(c)$ va fi atunci o consecinţă directă a teoremei lui Fermat. Din continuitatea pe $[a, b]$ rezultă existenţa a două puncte c şi d în $[a, b]$, în care f îşi atinge extremele. În particular, c şi d sînt şi puncte de extrem relativ. Punctele c şi d sînt diferite (altfel, f ar fi constantă pe $[a, b]$ şi teza din teorema lui Rolle ar fi satisfăcută de la sine). Datorită egalităţii $f(a) = f(b)$, cel puţin unul dintre punctele c şi d, fie acesta c, este interior, deci strict cuprins între a şi b. Rezultă că f este derivabilă în c, deci, conform teoremei lui Fermat, $f'(c) = 0$. Observăm că de fapt era suficient să presupunem că f admite derivată (finită sau infinită) în fiecare punct din (a, b).

Pentru stabilirea proprietăţii lui Darboux a derivatelor folosim o strategie asemănătoare. Avem de arătat că fiind dat un număr A cuprins între $f'(a)$ şi $f'(b)$, există c între a şi b, astfel încît $f'(c) = A$. Înlocuind funcţia $f(x)$ prin $f(x) - Ax = F(x)$, totul revine la a arăta că există c între a şi b astfel încît $F'(c) = 0$ (deoarece $F'(a) < 0 < F'(b)$). Ca şi în demonstraţia teoremei lui Rolle, avem de arătat că există între a şi b un punct c de extrem local. Ca şi acolo, pe baza continuităţii lui F pe $[a, b]$ rezultă că există două puncte c şi d între a şi b, în care F îşi atinge extremele. Este suficient să arătăm că măcar unul dintre ele este interior lui $[a, b]$. Din $F'(a) < 0$ rezultă că există o vecinătate V a lui a astfel încît pentru orice x din V, $x > a$, avem $F(x) < F(a)$. În mod asemănător, din $F'(b) > 0$ rezultă că există o vecinătate U a lui b astfel încît pentru orice x din U, $x < b$, avem $F(x) < F(b)$. Aceasta înseamnă că minimul (care este, de la sine, şi minim relativ) lui f este atins într-un punct c strict cuprins între a şi b, deci, conform teoremei lui Fermat, $F'(c) = 0$.

Din teorema lui Rolle putem obţine teorema de medie a lui Lagrange, numită şi teorema creşterilor finite: Dacă f este continuă pe $[a, b]$ şi admite derivată în fiecare punct din interiorul lui $[a, b]$, atunci există un punct c între a şi b astfel încît $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. Ideea demonstraţiei constă în a înlocui funcţia f prin alta F, căreia să i se

poată aplica teorema lui Rolle. Încercînd o funcție $F(x) = f(x) - kx$, ne putem pune problema de a determina pe k în așa fel încît $F(a) = F(b)$. Avem $f(a) - ka = f(b) - kb$, deci $k = (f(b) - f(a))/(b - a)$. Prin aplicarea teoremei lui Rolle rezultă existența lui c cu $F'(c) = 0$, adică $f'(c) - k = 0$, deci $f'(c) = k = (f(b) - f(a))/b - a)$. Teorema lui Lagrange este astfel demonstrată.

Teorema de medie a lui Cauchy (Fiind date f și g continue pe $[a, b]$, derivabile în (a, b), cu $g' \neq 0$, există c între a și b astfel încît $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(c)/g'(c)$ se demonstrează în mod asemănător, cu singura deosebire că se aplică teorema lui Rolle funcției auxiliare $F(x) = f(x) - kg(x)$, unde k este astfel încît $F(a) = F(b)$.

Este important să se observe că în teoremele lui Lagrange și Cauchy nu putem înlocui continuitatea pe $[a, b]$ prin continuitatea pe (a, b). Am dat exemple în acest sens cu prilejul discuției despre continuitate.

INTERPRETARE GEOMETRICĂ NU ÎNSEAMNĂ ȘI DEMONSTRAȚIE

Teorema de medie a lui Lagrange (ca și teorema lui Rolle) admite o interpretare simplă și sugestivă. Ea afirmă că, pentru orice coardă AB care subîntinde un arc al curbei reprezentate de graficul unei funcții derivabile, există pe acest arc un punct P în care tangenta geometrică la curbă este paralelă cu coarda AB. Ochiul nostru găsește singur un punct (s-ar putea să fie și mai multe) P cu această proprietate. Am putea spune că, din punctul de vedere al intuiției geometrice, teorema creșterilor finite este evidentă sau cel puțin perfect previzibilă. Coeficientul unghiular al coardei este $(f(b) - f(a))/(b - a)$, unde $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ sînt coordonatele punctelor A și B iar punctul P are coordonatele $(c, f'(c))$, unde c este convenabil ales între a și b. De ce totuși această evidență a desenului nu poate înlocui demonstrația? Deoarece desenul restrînge considerabil generalitatea enunțului teoremei lui Lagrange. În această teoremă este vorba de o funcție derivabilă pe (a, b), nepunîndu-se nici o condiție derivatei (decît faptul de a fi finită); însă pentru a putea desena graficul unei funcții nu este suficient ca funcția să fie (cu excepția unui număr finit de puncte) derivabilă, mai trebuie ca derivata să fie (cu excepția unui număr finit de puncte) continuă. Dar chiar în cazul unei funcții cu derivată continuă nu avem

garanția că particularitățile figurii nu influențează observațiile noastre.

Constatăm astfel încă o dată că desenul este foarte important pentru stimularea bănuielilor și căutărilor noastre într-o direcție sau alta, dar el nu poate ține loc de demonstrație. Dar Barbilian mergea mai departe și pretindea, cum am mai remarcat și altădată, că „desenul corupe raționamentul". El avea în vedere situația în care particularitățile desenului pot sugera o proprietate care nu mai funcționează în cazul general.

INTEGRALA

O ÎNTREBARE PENTRU ELEVII DE CLASA A XII-A

Mă aflam, într-una din zilele lui decembrie 1985, la o oră de Analiză matematică cu o clasă a XII-a de la Liceul „Mihail Sadoveanu" din București. Se preda formula lui Leibniz și Newton care stabilește legătura dintre integrală și primitivă. Profesorul scrisese pe tablă numele celor doi fondatori ai Calculului diferențial și integral. La sfîrșitul orei am intervenit adresînd elevilor întrebarea: Mai trăiesc Leibniz și Newton? După o scurtă tăcere generală, o elevă a răspuns, oarecum fără convingere: Nu. Am intervenit cu o nouă întrebare: A mai apucat Leibniz sau Newton să trăiască după al doilea or măcar după primul război mondial? A urmat o tăcere generală.

Am reflectat mult asupra acestei situații. Este oare fără importanță să știi că Analiza matematică nu-i o achiziție recentă, ci are o întreagă istorie? Poate fi despărțită această istorie de înțelegerea profundă a ideilor și rezultatelor de Analiză? Nu este istoria matematicii o parte organică a întregii istorii a culturii? Putem eluda legătura strînsă dintre dezvoltarea Analizei matematice și aceea a Geometriei, a Mecanicii, a Fizicii, a științei în general? Au fost Leibniz și Newton simpli meseriași? N-au marcat ei istoria culturii într-un mod comparabil cu acela în care au făcut-o marii creatori de artă? Ce-am spune despre cineva care l-ar plasa pe Leonardo da Vinci în secolul al XX-lea? Este oare Calculul diferențial și integral o simplă unealtă sau cumva constituie el una dintre marile performanțe culturale ale rasei umane? Putem concepe științele naturii, în dezvoltarea lor modernă, în afara ideilor de diferențială și integrală? Putem înțelege fenomene complexe ca cel al holografiei, care a afectat profund fizica și biologia contemporană, altfel decît în tradiția inaugurată de Leibniz și Newton? Putem concepe Analiza nonstandard, unul dintre importantele canale prin care fantasticul pătrunde în știință, în afara tendinței de recuperare a infiniților mici ai lui Leibniz? (Precizăm că Analiza nonstandard a fost creată în

1960 avînd ca punct de plecare ideile lui Leibniz iar aplicațiile ei în matematică, în științele naturii și în științele sociale au atras atenția multor cercetători).

Iată numai cîteva dintre considerentele care ne-au condus la ideeea de a urmări dezvoltarea ideii de integrală în perspectiva ei istorică. Desigur, nu pretindem că este necesar de fiecare dată să urmărim detaliat originile îndepărtate ale faptelor matematice. Dar eludarea totală a aspectului istoric riscă nu numai să dezumanizeze știința, dar și să facă imposibilă înțelegerea ei. O atitudine creatoare, ostilă rutinei, o atitudine care nu reduce matematica la o colecție de rețete, ci care se întreabă mereu asupra motivațiilor care-i ghidează dezvoltarea reface într-o oarecare măsură evoluția istorică. Așa cum ontogenia repetă filogenia, învățarea individuală a matematicii reface oarecum procesul ei de dezvoltare istorică. Faptul acesta este cu deosebire adevărat în ceea ce privește ideea de integrală, a cărei evoluție oglindește nu numai interacțiunea puternică dintre matematică și științele naturii, dar și creșterea treptată a nivelului de abstractizare și, poate și mai important, caracterul istoric al rigorii matematice. La toate acestea se adaugă profundele semnificații filozofice ale istoriei integralei.

Îl invităm deci pe cititor în acest itinerar captivant.

O PROBLEMĂ DE GEOMETRIE

Originile integralei pot fi urmărite departe în trecut. Ele sînt legate de probleme geometrice ca definirea și determinarea lungimii unei curbe, a ariei unei figuri plane sau a unei suprafețe în spațiu, a volumului unui corp solid sau de problema determinării centrului de greutate al unei figuri plane sau al unui corp solid. Cercetări de acest fel urcă pînă în antichitatea greacă (Eudox din școala lui Platon, secolul al IV-lea înaintea erei noastre și Arhimede, din școala din Alexandria, secolul al III-lea înaintea erei noastre) și sînt cunoscute acum sub numele de *metoda exhaustiei*, adoptat în secolul al XVII-lea. Problema geometrică de bază pe care își propune s-o rezolve teoria integralei este următoarea. Fie f o funcție reală pozitivă definită pe $[a, b]$. Fie $E(f)$ subgraficul lui f, adică mulțimea punctelor din plan de coordonate carteziene (x, y), pentru care $a \leqslant x \leqslant b$ și $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Ce trebuie să înțelegem prin aria mulțimii $E(f)$ și cum s-o determinăm?

Pînă în secolul al XIX-lea, existența ariei mulțimii $E(f)$ era acceptată ca evidentă din punctul de vedere al intuiției geometrice. Tot așa se accepta că aria este o funcție monotonă (dacă $A \subset B$, atunci aria lui A nu întrece aria lui B) și aditivă (dacă $A \cap B = 0$, atunci aria $(A \cup B) =$ aria $A +$ aria B). Însă, în același timp, funcțiile f pentru care se punea problema ariei lui $E(f)$ erau foarte particulare (date explicit prin expresii analitice care nu depășeau, sub aspectul complicației, suma unei serii de puteri, adică a unei serii de termen general $a_n x^n$). Funcțiile date prin acolade sau prezentînd tot felul de anomalii nu erau încă luate în considerare. De altfel, pînă în secolul trecut nici nu se vorbea de numere reale, ci de mărimi și de raporturile dintre ele.

Pentru a se obține o valoare aproximativă a ariei lui $E(f)$, se consideră o diviziune punctată incluzînd un sistem de numere de forma $a = x_0 < x_1 < x_2 < \quad < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ și un sistem de numere $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, astfel încît $x_i \leqslant z_i \leqslant x_{i+1}$ pentru $0 \leqslant i \leqslant n - 1$. Suma $t(f, p)$ a produselor $(x_{i+1} - x_i) f(z_i)$ (un astfel de produs reprezintă, evident, aria dreptunghiului de bază $x_{i+1} - x_i$ și de înălțime $f(z_i)$; deci suma produselor este aria unui poligon care aproximează pe aceea a lui $E(f)$), cînd i variază de la zero la $n - 1$, se numește (începînd cu sfîrșitul secolului al XIX-lea) *sumă Riemann* asociată funcției f și diviziunii punctate p. Notația obișnuită a acestor sume, folosită și în manualul de clasa a XII-lea, folosește litere grecești: sigma în loc de t, delta în loc de p. Am folosit de asemenea o notație liniară în locul celei obișnuite, indiciale: sigma indice delta de f. În esență, sume particulare de tip Riemann au apărut anterior lui Riemann, la Eudox, Arhimede, Cavalieri, Fermat (secolul al XVII-lea), Leibniz (secolul al XVII-lea), Euler (secolul al XVIII-lea) și Cauchy (secolul al XIX-lea). Nu intrăm în aceste detalii, dar cititorul interesat poate găsi o parte din ele în lucrarea noastră *Noțiuni de analiză matematică*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1967, unde capitolul al IV-lea dedică 84 de pagini unui itinerar în teoria integralei.

PERSPECTIVA CINEMATICĂ. GALILEI ȘI TORRICELLI

La o noțiune foarte importantă se ajunge de obicei din mai multe direcții, după cum și impactul ei se manifestă în mai multe domenii. Așa s-a întîmplat și cu integrala. Dacă itinerarul ei geometric începe încă în Antichitate, origi-

nea cinematică se cristalizează abia în secolul al XIV-lea, în legătură cu studiul mișcărilor neuniforme. De atunci datează următoarea observație: Deoarece într-o mișcare de viteză constantă v, spațiul vt parcurs între momentul inițial 0 și momentul t este reprezentat de aria dreptunghiului de înălțime v construit pe intervalul $[0, t]$, apare plauzibilă prelungirea acestei imagini la cazul mișcărilor uniform accelerate. Notîndu-se în acest caz cu v viteza atinsă la momentul t (viteză presupusă nulă la momentul inițial), reprezentarea grafică a vitezei în funcție de timp este dată de segmentul de dreaptă care unește originea coordonatelor cu punctul (t, v). Admițînd intuitiv că spațiul parcurs la momentul t este, după cum sugerează modelul anterior, dat de aria figurii situate între graficul vitezei și axa absciselor, matematicienii secolului al XIV-lea obțineau astfel, în cazul mișcării uniform accelerate, expresia $vt/2$. Galilei reface acest raționament în anul 1638, găsind pentru spațiu expresia $gt^2/2$ (g fiind o constantă) cunoscută azi de orice elev de liceu. Torricelli, elev al lui Galilei, reia la 1647 această abordare în cazul în care viteza este o funcție oarecare (*funcția oarecare* nu trebuie înțeleasă în sensul general de acum) de timp, afirmînd că și în acest caz spațiul $s\,(t)$ parcurs între momentele 0 și t este dat de aria figurii cuprinse între graficul lui $v(t)$ și segmentul $[0, t]$. În cazul $v\,(t) = c\,t^2$, Torricelli arată că $s\,(t) = c\,t^3/3$. El consideră curba dată de graficul lui $s(t)$ drept traiectoria unui mobil supus unor forțe datorită cărora proiecția orizontală a vitezei mobilului este constant egală cu unu. Dacă, atunci cînd mobilul se află în punctul P de coordonate $(t, s\,(t))$, se suprimă acțiunea forței, mobilul descrie tangenta în P la graficul unei mișcări uniforme, cu viteza constant egală celeia din momentul t, viteză a cărei proiecție orizontală este egală cu unu. Dacă această viteză schimbă de semn, aceeași tangentă este parcursă de mobil în sens opus, întîlnind axa ordonatelor într-un punct Q de coordonate $(0, s)$, după o durată egală cu t, deoarece, în mișcarea sa rectilinie uniformă, componenta orizontală a vitezei este constant egală cu minus unu. Rezultă că viteza în P a mobilului este egală cu $|QP|/t$ iar componenta ei verticală este $v(t) = |RQ|/t = |RQ|/|RP|$, unde R este punctul de coordonate $(0, s\,(t))$. De aici, Torricelli a dedus că $v\,(t)$ este dată de tangenta trigonometrică a unghiului RPQ format cu axa absciselor de tangenta geometrică în P la graficul lui $s\,(t)$.

Se poate deci spune (după cum remarcă Jean Mawhin, de la care împrumutăm aceste considerații) că *Torricelli*

a întrevăzut caracterul invers al operațiilor de cuadratură (spațiul parcurs pînă la momentul t este dat de aria situată între segmentul $[0, t]$ și graficul vitezei *și de tangentă* (tangenta într-un punct la graficul spațiului parcurs corespunde vitezei la momentul respectiv). Din nefericire, Torricelli moare destul de tînăr, la vîrsta de 39 de ani. Cercetările sale prezentate mai sus au devenit cunoscute abia în 1919.

MOMENTUL ISAAC NEWTON

Ce l-a împiedicat pe Torricelli să meargă mai departe? Absența unui algoritm de determinare a tangentei la o curbă. Astăzi știm că aceasta înseamnă absența unui calcul diferențial. Astfel se explică faptul că Torricelli n-a văzut în rezultatul său decît un mijloc de determinare a tangentei, nu și o metodă de calcul al ariilor. Practic, Torricelli știa că dacă $v(t) = c\,t^2$, atunci $s(t) = c\,t^3/3$; deducînd de aici că tangenta la curba $(t, ct^3/3)$ se obține trasînd diagonala dreptunghiului de bază unu și de înălțime ct^2, construit în punctul $(t, ct^3/3)$.

Considerații apropiate celor de mai sus apar la englezul Barrow, care , în 1660, „predă ștafeta" elevului său Isaac Newton, care găsește ceea ce nu reușiseră predecesorii săi: o metodă *analitică* de determinare a tangentei la o curbă plană. Curba este numită de Newton *fluentă*, iar viteza este numită *fluxiune*. Newton nu se limitează la curbe algebrice, ci, prin dezvoltări în serie (bazate în mare măsură pe seria generală a binomului) extinde algoritmul său la curbe transcendente, determinînd (prin integrare termen cu termen) aria subgraficului $E(f)$ pentru unele funcții f iraționale sau transcendente.

Dar poate că rezultatul cel mai important obținut de Newton este următorul (exprimat, firește, în limbajul de azi): Aria $F(x)$ a acelei porțiuni din subgraficul $E(f)$ al lui f care corespunde subintervalului $[a, x]$ al lui $[a, b]$ are ca derivată pe $f(x)$. De aici, Newton deduce că determinarea ariei lui $E(f)$ revine la următoarele: Să se găsească o funcție F avînd ca derivată pe f pe $[a, b]$ și să se calculeze $F(b) - F(a)$. În acest fel, *Newton impune primatul funcției primitive și legătura dintre primitivă și arie, pe baza unui algoritm deosebit de simplu.*

Contrar lui Newton, G. W. Leibniz are ca punct de plecare, în problema ariilor, operația de limită a unei sume. Spre sfîrșitul secolului al XVII-lea, Leibniz se interesează de problema diferențelor finite. Fiind dat un șir (a_k) de numere reale ($k = 0, 1, 2, \ldots$), să punem $\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$ pentru $k = 1, 2,$ Rezultă că suma de la 1 la m din Δa_k este egală cu $a_m - a_0$, deci $\Delta(\Sigma a_k;\ 1 \leqslant k \leqslant m) = a_m$ ($m = 1, 2, \ldots$). *Operațiile de diferență* Δ *și sumă* Σ *apar astfel inverse una alteia.*

Dacă trecem acum la determinarea ariei lui $E(f)$ cu ajutorul sumelor Riemann $t(f, p)$ (a se vedea notațiile adoptate într-un paragraf anterior) în cazul particular $n = m$, $x_i = a_i$ ($0 \leqslant i \leqslant m$) și $z_i = a_{i+1}$ ($0 \leqslant i \leqslant m - 1$), obținem pentru $t(f, p)$ expresia $\Sigma(f(a_j)\ \Delta a_j;\ 1 \leqslant j \leqslant m)$, ca o aproximare a ariei lui $E(f)$. Pe de altă parte, raportul $\Delta f(a_j)/\Delta a_j$ este o aproximare a tangentei la graficul lui f în punctul $(a_j, f(a_j))$. Punînd $F(a_k) = \Sigma(f(a_j)\ \Delta a_j;\ 1 \leqslant j \leqslant k)$ pentru $k = 1, 2, \ldots$, avem $\Delta F(a_k) = f(a_k)\ \Delta a_k$, deci (1) $(\Delta F(a_k))/\Delta a_k = f(a_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Leibniz extrapolează aceste rezultate la cazul în care diferențele Δa_j devin „infinit mici". Suma Riemann $t(f, p)$ devine atunci aria lui E (f), pe care Leibniz o notează

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

numind-o *suma lui f*. Abia frații Bernoulli introduc, pe la 1690, termenul de *integrală*, pe care-l adoptă și Leibniz și care corespunde la ceea ce numim azi *primitivă*. Dacă se notează cu $F(x)$ aria porțiunii din subgraficul $E(f)$ al lui f corespunzătoare subintervalului $[a, x]$, relația (1) devine $F'(x) = f(x)$, ceea ce în notația lui Leibniz se scrie $(dF/dx)(x) = f(x)$ sau

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

altfel spus: diferențiala integralei (sau ariei) este egală cu produsul dintre derivata integralei și diferențiala lui x. Extrapolînd relația $\Sigma((\Delta f(a_j))/\Delta a_j)\Delta a_j;\ (1 \leqslant j \leqslant m) = \Sigma(\Delta f(a_j);\ 1 \leqslant j \leqslant m) = f(b) - f(a)$ în cazul în care cantitățile Δa_j devin infinit mici, se obține faptul că aria subgraficului lui f' este egală cu $f(b) - f(a)$. *Integrala definită* a lui f pe

$[a, b]$ desemnează aria subgraficului $E(f)$ și este, prin definiție, diferența $F(b) - F(a)$, unde F este o primitivă a lui f. Notația

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

pe care o folosim azi pentru integrala definită a fost introdusă în 1816, de către Fourier. Această notație trebuie luată ca un tot.

RIGOAREA CAUCHY-RIEMANN

Pînă la Cauchy, problema existenței integralei sau primitivei nu era distinctă de problema evaluării lor. Prin precizarea ideii de limită, într-o formă apropiată celei cu care lucrăm azi, Cauchy își pune, la 1823, o întrebare nouă: „În calculul integral, ni se pare necesar să demonstrăm, de o manieră generală, existența integralelor și primitivelor și numai după aceea să le studiem proprietățile" (A. Cauchy, *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823). El își pune problema *existenței* cantităților pe care vrem să le calculăm, exact sau aproximativ. Cauchy demonstrează (chiar dacă incomplet) că dacă f este continuă pe $[a, b]$ atunci sumele Riemann $t(f, p)$ pentru care $z_i = x_i$ oricare ar fi $0 \leqslant i \leqslant n - 1$ (acestea se numesc azi *sume Cauchy*) converg către o valoare unică I de îndată ce norma diviziunii p tinde la zero (sensul acestei convergențe este cel cunoscut din studiul integralei în manualul de clasa a XII-a). Valoarea I este integrala lui f de la a la b. Cauchy introduce, pentru orice funcție f continuă pe $[a, b]$, ideea de integrală nedefinită, dată de

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

și demonstrează că F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$ pentru orice x în $[a, b]$. Se obține astfel *prima demonstrație a existenței primitivei pentru orice funcție continuă*. De asemenea, Cauchy arată că, pentru *orice* primitivă F a lui f, integrala de la a la b a lui f este egală cu $F(b) - F(a)$.

În 1854, un nou pas important în clarificarea ideii de integrală este realizat de Bernhard Riemann, care consideră sumele t(f, p) în forma generală cu care lucrăm azi. Riemann este primul care încearcă să definească integrala pentru

o funcție nesupusă *a priori* nici unei restricții. Funcțiile nu mai sînt, ca la Cauchy, obligate să fie continue (sau cel mult cu un număr finit de discontinuități). Desigur, acest fapt devenise posibil datorită precizării ideii generale de funcție și a naturii procesului de aproximare prin sume finite a ariei subgraficului asociat unei funcții.

Punîndu-și problema *existenței integralei*, Cauchy și Riemann își pun implicit problema *existenței ariei* subgraficului asociat unei funcții. Răspunsul lui Cauchy este afirmativ în cazul funcțiilor continue (lăsîndu-ne fără răspuns în cazul general), în timp ce răspunsul lui Riemann este negativ în cazul general. Astfel, dacă f este funcția lui Dirichlet, definită pe $[a, b]$ și egală cu zero pentru x irațional și cu unu pentru x rațional, sumele $t(f, p)$ vor fi egale cu $b - a$ dacă toate valorile z_i sînt raționale și egale cu zero dacă toate valorile z_i sînt irraționale; deci, pe intervalul $[a, b]$, funcția lui Dirichlet nu este integrabilă Riemann.

CÎT DE DISCONTINUĂ POATE FI O FUNCȚIE INTEGRABILĂ RIEMANN?

Să amintim definiția exactă a integrabilității Riemann. Funcția $f: [a, b] \to R$ este integrabilă R dacă există un număr real I astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că, oricare ar fi diviziunea punctată p a lui $[a, b]$ de normă inferioară lui δ, avem $|t(f, p) - I| < \varepsilon$. (Amintim că norma unei diviziuni p este maximul dintre lungimile intervalelor $[x_i, x_{i+1}]$ care alcătuiesc diviziunea p). Riemann precede această formulare riguroasă de o alta, mai puțin riguroasă, dar mai sugestivă: Valoarea sumei $t(f, p)$ depinde de alegerea numerelor x_i și z_i. Dacă, indiferent de această alegere, suma $t(f, p)$ are proprietatea de a se apropia indefinit de o limită fixă I de îndată ce diferențele $x_{i+1} - x_i$ tind toate la zero, atunci această limită se numește valoarea integralei definite a lui f de la a la b.

Să observăm că aici apar două noțiuni: una exprimînd o proprietate, *integrabilitatea*; alta exprimînd un număr real, *integrala*. Ele nu se definesc succesiv, ci concomitent.

Cît de departe, dincolo de clasa funcțiilor continue, are loc integrabilitatea în sensul lui Riemann? Am văzut că există funcții $f \geqslant 0$ neintegrabile, deci pentru care subgraficul lui f *nu* are arie. Riemann dă însă un exemplu de funcție care, deși are o mulțime densă de puncte de discontinuitate, este integrabilă în sensul său: Fie $f: [0, 1] \to R$

astfel încît $f(x) = 0$ dacă x este irațional și $f(p/q) = 1/q$ dacă p și q sînt numere întregi prime între ele, $q > 0$. Se constată că această funcție este integrabilă pe $[0, 1]$ iar integrala este egală cu zero (pentru demonstrație, se folosește faptul că în orice interval finit există numai un număr finit de numere raționale p/q ireductibile, pentru care q e depășit de un număr natural dat). Nu este însă greu de observat că funcția lui Riemann este continuă în orice punct irațional, deci punctele ei de discontinuitate formează o mulțime numărabilă (care coincide cu mulțimea punctelor raționale din $[0, 1]$). Poate exista o funcție integrabilă Riemann cu o infinitate nenumărabilă de puncte de discontinuitate? Răspunsul este afirmativ. Într-adevăr, să considerăm mulțimea A a numerelor reale cuprinse între 0 și 1, în a căror dezvoltare triadică infinită lipsește cifra 1. Aceasta înseamnă că x aparține lui A exact atunci cînd este de forma $a_1/3 + a_2/3^2 + \ldots + a_n/3^n + \ldots$, unde numărătorii $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ pot lua numai valorile 0 și 2. Mulțimea A este nenumărabilă iar funcția $f\colon [0, 1] \to R$ pentru care $f(x) = 1$ dacă x este în A și $f(x) = 0$ dacă x lipsește din A este integrabilă pe $[0, 1]$, deși este discontinuă în fiecare punct din A.

Răspunsul complet la întrebarea formulată în titlul acestui paragraf a fost dat abia la începutul secolului nostru de către Henri Lebesgue, cu ajutorul noțiunii de *mulțime de măsură nulă*. O mulțime E de numere reale este de măsură nulă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un șir (In) de intervale deschise din R astfel încît E este conținută în reuniunea intervalelor In iar suma lungimilor acestor intervale (de fapt, suma unei serii) este inferioară lui ε. Rezultatul lui Lebesgue se enunță în felul următor: Funcția mărginită $f\colon [a, b] \to R$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă punctele ei de discontinuitate formează o mulțime de măsură nulă.

Însă această teoremă (ca și demonstrația ei) depășește limitele programei școlare.

INTEGRABILITATE FĂRĂ INTEGRALĂ ȘI CONVERGENȚĂ FĂRĂ LIMITĂ

Există două strategii în studiul integralei Riemann. Una utilizează sumele Riemann, alta se folosește de sumele Darboux. Fiecare dintre aceste două tipuri de sume prezintă avantaje și dezavantaje față de celălalt tip. Nu vom discuta această chestiune în detaliu. Vom menționa că teorema de

caracterizare a funcțiilor mărginite integrabile Riemann se demonstrează cu ajutorul sumelor Darboux. Pe aceeași cale se demonstrează direct și simplu că funcțiile continue sînt integrabile (intervine aici esențial faptul că o funcție continuă pe un interval închis și mărginit este uniform continuă). Există însă și posibilitatea de a demonstra integrabilitatea funcțiilor continue cu ajutorul sumelor Riemann. Importantă, în acest sens, este posibilitatea de a formula proprietatea de integrabilitate fără a folosi valoarea integralei. În definiția folosită în manualul de clasa a XII-a (definiție adoptată în mai toate cărțile, printr-o tradiție care vine din secolul trecut) ca și în definiția cu ajutorul integralelor Darboux inferioară și superioară (unde integrabilitatea este definită prin egalitatea celor două integrale Darboux, a căror valoare comună este valoarea integralei) valoarea integralei este explicit folosită, deci integrabilitatea și integrala se definesc nu succesiv, ci concomitent. Faptul acesta este uneori un avantaj, alteori un dezavantaj. Este de aceea necesar să dispunem de definiții alternative, cu și fără folosirea valorii integralei. Să ne amintim că o problemă similară apărea în studiul convergenței șirurilor și în cel al limitei unei funcții într-un punct. Unele definiții ale convergenței unui șir (a_n) folosesc valoarea limitei, altele nu; a se compara formularea: „Există un număr real a astfel încît oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr natural n_ε cu proprietatea că pentru orice $n > n_\varepsilon$ avem $|a_n - a| < \varepsilon$" cu formularea: „Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încît $m, n > n_\varepsilon$ implică $|a_m - a_n| < \varepsilon$". Prima definește fenomenul de convergență, a doua pe acela de șir Cauchy sau șir fundamental. Însă o teoremă importantă (criteriul de convergență al lui Cauchy) afirmă echivalența lor. Importanța unei teoreme ca aceea care afirmă convergența oricărui șir monoton și mărginit constă în bună măsură în faptul că ea nu se prevalează de valoarea limitei șirului. Astfel, pe baza ei se stabilește convergența șirului avînd ca termen general puterea a n — a a binomului $1 + 1/n$, fără a cunoaște valoarea limitei (valoare care, în acest caz, nici n-ar putea fi exprimată mai simplu decît prin însăși limita șirului menționat, limită notată cu litera e (după Euler?) și constînd în baza naturală a logaritmilor).

SUMELE DARBOUX ŞI CARACTERIZAREA INTRINSECĂ A INTEGRABILITĂŢII

Proprietatea unei funcţii de a avea limită într-un punct se poate şi ea exprima fără intervenţia explicită a valorii limitei. Putem cere funcţiei f definite pe (a, b), eventual nu şi în punctul c din (a, b), să fie astfel încît, pentru orice şir (x_n) tinzînd către c $(x_n \neq c)$ şirul $(f(x_n))$ să fie fundamental. Dar nu este greu de văzut că această condiţie este echivalentă cu următoarea: Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît, dacă $c - \delta < x' < x'' < c + \delta$ şi $x' \neq c \neq x''$, atunci $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Echivalenţa celor două proprietăţi poartă numele de criteriul lui Cauchy şi Bolzano.

Cum putem obţine ceva asemănător în ceea ce priveşte proprietatea de integrabilitate? Răspunsul este uşor de dat dacă adoptăm strategia sumelor Darboux. Într-adevăr, oricare dintre următoarele proprietăţi este echivalentă cu integrabilitatea lui f pe $[a, b]$ (notăm cu d o diviziune a lui $[a, b]$ şi cu $s(d)$ şi $S(d)$ sumele Darboux inferioară şi superioară asociate lui f, pentru diviziunea d): 1) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune d cu proprietatea $S(d) - s(d) < \varepsilon$; 2) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune d astfel încît oricare ar fi diviziunea d' mai fină decît d avem $S(d') - s(d') < \varepsilon$; 3) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv δ astfel încît, oricare ar fi diviziunea d de normă inferioară lui δ avem $S(d) - s(d) < \varepsilon$. Să arătăm, de exemplu, că proprietatea 1 este echivalentă cu proprietatea de integrabilitate, definită prin egalitatea $I_1 = I_2$, unde I_1 este supremumul sumelor $s(d)$ iar I_2 este infimumul sumelor $S(d)$, pentru toate diviziunile d posibile ale lui $[a, b]$. Dacă f este integrabilă, deci dacă $I_1 = I_2 (= I)$, atunci există, pentru $\varepsilon > 0$, două diviziuni d_1 şi d_2 astfel încît $S(d_2) - I < \varepsilon/2$ şi $I - s(d_1) < \varepsilon/2$. Să considerăm acum diviziunea d formată cu punctele de diviziune care aparţin fie lui d_1, fie lui d_2. Deoarece d este mai fină atît decît d_1 cît şi decît d_2, avem $s(d_1) \leqslant s(d) \leqslant S(d) \leqslant S(d_2)$, deci $S(d) - s(d) \leqslant S(d_2) - s(d_1) < \varepsilon$ şi proprietatea 1 este astfel satisfăcută. Reciproc, dacă proprietatea 1 este satisfăcută, deci dacă există, pentru $\varepsilon > 0$, o diviziune d pentru care $S(d) - s(d) < \varepsilon$, atunci, deoarece oricum avem $0 \leqslant I_2 - I_1 \leqslant S(d) - s(d)$, va rezulta $0 \leqslant I_2 - I_1 < \varepsilon$ pentru orice număr pozitiv ε, deci $I_1 = I_2$ şi f este integrabilă pe $[a, b]$.

Cum procedăm însă dacă adoptăm strategia sumelor Riemann? Conform definiţiei din manualul de clasa a XII-a, funcţia f definită pe $[a, b]$, cu valori reale, este integrabilă pe $[a, b]$ dacă există un număr real I astfel încît pentru orice şir de diviziuni punctate (p_n) de normă tinzînd la zero şirul $(t(f, p_n))$ al sumelor Riemann tinde la I. Problema este însă: Cum putem exprima proprietatea de integrabilitate cu ajutorul sumelor Riemann, fără a implica în formulare valoarea integralei? Răspunsul este mai puţin simplu decît în cazul sumelor Darboux, dar nu atît de complicat încît să nu-l putem reproduce aici. Ideea constă în a căuta pentru sumele Riemann un analog al criteriului de convergenţă al lui Cauchy de la şiruri şi al criteriului lui Cauchy şi Bolzano de la funcţii. Acest analog există şi este următorul:

Funcţia $f: [a, b] \to R$, mărginită pe $[a, b]$, este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv δ astfel încît, de îndată ce norma diviziunilor punctate p_1 şi p_2 ale lui $[a, b]$ este inferioară lui δ, avem $|t(f, p_1) - t(f, p_2)| < \varepsilon$.

Să observăm că din integrabilitatea Riemann rezultă uşor proprietatea menţionată. Într-adevăr, să admitem că că există un număr real I cu proprietatea că oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\delta > 0$ astfel încît, de îndată ce norma lui p este inferioară lui δ, avem $|t(f, p) - I| < \varepsilon$. În aceste condiţii, deoarece $|t(f, p_1) - t(f, p_2)| \leqslant |t(f, p_1) - I| + |t(f, p_2) - I|$ şi deoarece, pentru p_1 şi p_2 de normă inferioară lui δ, avem $|t(f, p_1) - I| < \varepsilon > |t(f, p_2) - I|$, rezultă că $|t(f, p_1) - t(f, p_2)| < 2\varepsilon$ de îndată ce norma lui p_1 şi p_2 este inferioară lui δ.

Reciproc, să arătăm că din proprietatea menţionată rezultă integrabilitatea Riemann. Din mărginirea lui f rezultă existenţa unui număr real M pentru care $|t(f, p)| \leqslant \leqslant \Sigma\,[|f(\xi_i)|\,(x_{i+1} - x_i);\ 0 \leqslant i \leqslant n - 1] < M\,\Sigma\,(x_{i+1} - x_i) = = M(b - a)$, deci mulţimea sumelor Riemann este mărginită. Aceasta înseamnă că pentru orice şir (p_n) de diviziuni punctate de normă tinzînd la zero, şirul $(t(f, p_n))$ este mărginit, deci, conform lemei lui Cesaro, admite un subşir convergent, a cărui limită o vom nota cu I. Pentru a nu mai complica notaţia, vom admite că chiar şirul $(t(f, p_n))$ este convergent. Vom arăta că limita sa I este chiar integrala Riemann a lui f pe $[a, b]$. Pentru aceasta, va fi suficient să arătăm că pentru orice şir (q_n) de diviziuni de normă

tinzînd la zero şirul $(t(f, q_n))$ are aceeaşi limită I. În acest scop, să observăm că pentru n suficient de mare normele diviziunilor p_n şi q_n sînt inferioare lui δ, deci, conform ipotezei, $|t(f, p_n) - t(f, q_n)| < \varepsilon$, deci limita I a şirului $(t(f, p_n))$ este, în acelaşi timp, limita şirului $(t(f, q_n))$.

Am demonstrat astfel că f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ (definiţia cu ajutorul şirurilor, adoptată în manualul de clasa a XII-a şi folosită mai sus, este echivalentă cu definiţia cu ε, dar fără şiruri, pe care am adoptat-o iniţial pentru integrabilitatea Riemann).

FUNCŢIILE CONTINUE SÎNT DERIVATE INTEGRABILE

Pentru a stabili rezultatul din titlul acestui paragraf, procedăm în două etape. Într-o primă etapă stabilim integrabilitatea Riemann a funcţiilor continue iar în a doua etapă stabilim existenţa primitivei unei funcţii continue pe $[a, b]$ şi validitatea unei formule de tip Leibniz-Newton: valoarea integralei lui f de la a la b este egală cu diferenţa dintre valorile în b şi a ale unei primitive oarecare a lui f. Însă integrabilitatea funcţiilor continue poate fi stabilită şi ea în două feluri, după cum ne prevalăm de sume Darboux sau de sume Riemann.

Prima cale este mai simplă. Avem $S(d) - s(d) = \Sigma[(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i); 0 \leqslant i \leqslant n - 1] = \Sigma[\omega_i(x_{i+1} - x_i); 0 \leqslant i \leqslant n - 1]$, unde am notat cu ω_i oscilaţia lui f pe $[x_i, x_{i+1}]$, adică diferenţa dintre supremumul (marginea superioară) M_i şi infimumul (marginea inferioară) m_i ale lui f pe $[x_i, x_{i+1}]$. Pe baza continuităţii uniforme a lui f pe $[a, b]$ rezultă că, fiind dat $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încît dacă norma lui d este inferioară lui δ, atunci $\omega_i < \varepsilon$ pentru $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, deci $S(d) - s(d) < \varepsilon(b - a)$ iar f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

A doua cale, pe care o vom indica fără toate detaliile, se bazează pe folosirea sumelor Riemann. Vom utiliza teorema din paragraful anterior, privind caracterizarea intrinsecă a integrabilităţii cu ajutorul sumelor Riemann. În acest scop, vom forma diferenţa dintre două sume Riemann asociate unor diviziuni punctate şi vom arăta că ea devine, în valoare absolută, oricît de mică, dacă norma diviziunilor este suficient de mică: $|t(f, p) - t(f, r)| = |\Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \Sigma f(\eta_j)(y_{j+1} - y_j)|$. Să considerăm acum o diviziune $u = (a = z_0 \leqslant \zeta_0 \leqslant z_1 \leqslant \quad \leqslant z_k \leqslant \zeta_k \leqslant z_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant z_m = b)$ formată cu reuniunea punctelor care definesc

diviziunile p și r. Obținem $|t(f, p) - t(f, r)| = |\Sigma(f(\zeta_k) - f(\zeta'_k))(z_{k+1} - z_k)| \leqslant \Sigma|f(\zeta_k) - f(\zeta'_k)|(z_{k+1} - z_k)$, unde ζ_k și ζ'_k aparțin lui $[z_k, z_{k+1}]$. Însă norma lui u nu întrece normele lui p și r, deci rămîne inferioară lui δ dacă normele lui p și r sînt inferioare lui δ. Să presupunem că acest δ este numărul pozitiv asociat unui $\varepsilon > 0$ dat, în așa fel încît, în virtutea continuității uniforme a lui f pe $[a, b]$, să avem, pentru $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$, inegalitatea $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dacă norma lui p și r este inferioară lui δ, atunci putem lua în rolul lui x și y pe ζ_k și ζ'_k, deci $\Sigma|f(\zeta_k) - f(\zeta'_k)| \cdot (z_{k+1} - z_k) < \varepsilon\Sigma(z_{k+1} - z_k) = \varepsilon(b - a)$, deci $|t(f, p) - t(f, r)| < \varepsilon(b - a)$ de îndată ce norma lui p și r este inferioară lui δ. Rezultă că f este integrabilă pe $[a, b]$.

TEOREMA LUI LEIBNIZ ȘI NEWTON

Acum putem arăta că funcțiile continue au primitivă și are loc teorema lui Leibniz și Newton. Din integrabilitatea lui f pe $[a, b]$ rezultă integrabilitatea ei pe orice interval $[a, x]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Să notăm cu $F(x)$ integrala lui f pe $[a, x]$. Vom arăta că F este primitiva lui f pe $[a, b]$ și că integrala lui f pe $[a, b]$ este egală cu $F(b) - F(a)$. Diferența $F(x) - F(x_0)$ este egală cu integrala de la x_0 la x a lui f. Avem deci $(F(x) - F(x_0))/(x - x_0) = f(z)$, unde z este un punct convenabil ales în $[x_0, x]$, pe baza teoremei de medie aplicate integralei unei funcții continue. Cînd x tinde la x_0, z tinde la x_0 și, în baza continuității, $f(z)$ tinde la $f(x_0)$, deci și primul membru tinde la $f(x_0)$, cu alte cuvinte $F'(x_0) = f(x_0)$. Însă x_0 este un punct arbitrar în $[a, b]$, deci F este primitiva lui f pe $[a, b]$.

Să trecem acum la stabilirea formulei lui Leibniz și Newton. Avem, pentru o diviziune d oarecare a lui $[a, b]$, $d = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$, $F(b) - F(a) = \Sigma[F(x_{i+1}) - F(x_i);\ 0 \leqslant i \leqslant n - 1]$. Aplicînd lui F teorema creșterilor finite pe $[x_i, x_{i+1}]$, obținem un punct ξ_i din $[x_i, x_{i+1}]$, astfel încît $F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$, deci $F(b) - F(a) = \Sigma[f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i);\ 0 \leqslant i \leqslant n - 1$. Însă, în baza integrabilității lui f pe $[a, b]$, suma din membrul al doilea tinde către integrala lui f pe $[a, b]$ cînd norma lui d tinde la zero, deci

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Această relație a constituit actul de naștere al Analizei matematice, devenind veriga de legătură dintre cele două concepte fundamentale ale Analizei: derivata și integrala. Însă posibilitatea de a reduce evaluarea integralei la aceea a primitivei funcției de integrat devine rentabilă în măsura în care găsirea primitivelor este mai comodă decît calculul integralei pe baza definiției ei cu ajutorul sumelor. După cum se știe, pentru cele mai multe funcții elementare s-au elaborat metode de găsire a primitivelor, pe baza cărora calculul multor integrale devine o simplă chestiune de rutină. Dar, deși teorema de mai sus ne asigură că orice funcție continuă admite primitivă, găsirea acestei primitive nu este totdeauna posibilă, deoarece unele funcții continue ca $(\sin x)/x$, $\sin x^2$ sau e^{-x^2} nu admit primitive exprimabile elementar (adică putînd fi obținute pornind de la funcții elementare, prin aplicarea unui număr finit de operații algebrice uzuale). Neștiind acest fapt, la concursul de admitere în învățămîntul superior din iulie 1985 unii candidați au pierdut mult timp căutînd să aplice formula lui Leibniz și Newton integralei funcției e^{-x^2}.

INTEGRAREA, CA OPERAȚIE INVERSĂ DERIVĂRII

În contrast cu numeroasele situații în care o teoremă este ridicată la rangul de definiție, formula lui Leibniz și Newton ilustrează situația inversă, în care o definiție este transformată într-o teoremă. Pentru Leibniz și Newton, formula care le poartă astăzi numele era chiar un mod de definire a integralei. Ei preconizau deci o integrare ca operație inversă diferențierii. Într-un moment în care conceptele Analizei matematice nu se cristalizaseră încă într-o formă suficient de riguroasă pentru a se putea stabili statutul lor comparativ, derivatele erau deci, toate, integrabile, formula propusă de întemeietorii Analizei fiind legiferarea unui fapt care era mai degrabă o ipoteză, un deziderat, un adevărat pariu pe care Leibniz și Newton îl propuneau generațiilor următoare de matematicieni. Intuiția lor avea un suport fizic incontestabil. Nu era natural ca integrarea, ca operație de trecere de la descrierea locală a unui fenomen la caracterizarea sa globală (de la valorile funcției la aria subgraficului ei, de la densitate la masă, de la viteză la spațiul parcurs etc). să fie inversa operației de derivare, care modela exact itinerarul invers; de la descrierea globală la cea locală, punctuală, instantanee?

Multă vreme s-a crezut că Newton şi Leibniz au pierdut acest pariu. Astfel, la sfîrşitul secolului trecut Vito Volterra a dat un exemplu de derivată mărginită, dar neintegrabilă Riemann pe $[a, b]$. Dar şi mai interesant s-a dovedit a fi un alt exemplu, bazat pe o funcţie folosită de Pompeiu în cercetările sale privind teoria funcţiilor de variabilă complexă. Să considerăm un şir (a_n) format cu toate numerele raţionale din $[a, b]$ şi să formăm seria care are ca termen general produsul dintre $1/2^n$ şi puterea de exponent $1/3$ a lui $x - a_n$, Dimitrie Pompeiu, mare matematician român din primele decenii ale secolului nostru, a arătat că această serie este convergentă iar suma ei $F(x)$ este strict crescătoare, continuă, cu derivata finită sau infinită în fiecare punct din $[a, b]$. Inversa $G(t)$ a lui $F(x)$ este strict crescătoare, continuă, derivabilă, cu derivata $G'(t)$ mărginită pe intervalul $[\alpha, \beta]$, unde $\alpha = F(a)$ şi $\beta = F(b)$. Dar proprietatea cea mai importantă a derivatei lui Pompeiu $G'(t)$ constă în faptul că în *orice* subinterval al lui $[\alpha, \beta]$ există puncte în care această derivată se anulează. Deoarece derivata nu poate lua valori negative (G fiind crescătoare), rezultă că orice sumă Darboux inferioară este egală cu zero, deci integrala Darboux inferioară este şi ea nulă pe orice subinterval al lui $[\alpha, \beta]$. De aici deducem că dacă derivata $G'(t)$ ar fi integrabilă Riemann pe un subinterval al lui $[\alpha, \beta]$ ar trebui ca valoarea integralei să fie nulă. Însă acest fapt ar veni în contradicţie cu proprietatea lui G de a fi strict crescătoare, proprietate pe baza căreia (prin aplicarea formulei lui Leibniz şi Newton, formulă valabilă nu numai pentru derivate continue ci pentru orice derivată integrabilă Riemann) integrala derivatei G' este strict pozitivă pe orice subinterval al lui $[\alpha, \beta]$

La începutul secolului nostru, Henri Lebesgue reuşeşte să definească o integrală care permite integrarea oricărei derivate mărginite, deci şi a derivatei lui Pompeiu. Totuşi, nici integrala lui Lebesgue (pe care o vom defini ceva mai jos) nu permite să se integreze orice derivată finită, adică orice funcţie care admite primitivă. Un exemplu de derivată „recalcitrantă" este în această privinţă, derivata funcţiei $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, pentru x diferit de zero, $f(0) = 0$. Se verifică uşor că această funcţie este derivabilă în orice punct, inclusiv în origine. Totuşi, această derivată *nu* este integrabilă Lebesgue pe nici un interval care conţine originea. Un alt exemplu de acest fel este derivata funcţiei $f(x) = 0$ dacă $x = 0$, $f(x) = x^2 \cos(\pi/x^2)$ dacă $x > 0$,

derivată care pe [0, 1] nu este integrabilă Lebesgue, după cum am arătat în cartea *Noțiuni de analiză matematică* (Editura Științifică, 1967, p.177).

DIVIZIUNI COMPATIBILE CU O FUNCȚIE POZITIVĂ

Să considerăm o funcție F derivabilă pe (a, b). *Derivabilitatea în* $x \in (a, b)$ *revine la faptul că pentru* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon(x) > 0$ *cu proprietatea că pentru* $|y - x| < \delta_\varepsilon(x)$ $(y \in (a, b))$ *avem* $|(F(y) - F(x))/(y - x) - F'(x)| < \varepsilon$, *deci* $|F(y) - F(x) - F'(x)(y - x)| < \varepsilon |y - x|$. Este natural să ne întrebăm dacă nu cumva numărul $\delta_\varepsilon(x)$ are o legătură cu pragul superior impus normei diviziunilor în studiul sumelor Riemann. Însă acest prag nu depinde de x, în timp ce în cele de mai sus această dependență apare foarte natural.

La o funcție de tipul $\delta(x)$ care are o legătură cu norma diviziunilor putem ajunge însă și pornind de la o cu totul altă idee, care pînă la urmă va fuziona cu cea inițială. Să presupunem că f este o funcție reală pozitivă pe $[a, b]$. În încercarea de a defini aria subgraficului funcției f pe $[a, b]$, procedeul clasic este cel al considerării unei diviziuni punctate $p : a = x_0 \leqslant \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$ (unde $x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n$), apoi a considerării ariilor dreptunghiurilor de bază $x_{i+1} - x_i$ și de înălțime $f(\xi_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n - 1)$. Suma acestor arii constituie aria unui domeniu poligonal care aproximează întinderea subgraficului lui f pe $[a, b]$ cu atît mai bine cu cît norma diviziunii este mai apropiată de zero, cu condiția ca pentru orice șir de diviziuni de normă tinzînd la zero limita șirului asociat de arii poligonale să aibă una și aceeași valoare.

Tot ceea ce am spus pînă aici este interpretarea geometrică a definiției integrabilității și integralei Riemann pe baza șirurilor de sume Riemann asociate unor diviziuni de normă tinzînd la zero. Să încercăm să privim altfel problema aproximării subgraficului lui f cu ajutorul unor arii dreptunghiulare. Să ne imaginăm o funcție f derivabilă pe $[a, b]$, cu derivata continuă. Putem deci trasa graficul acestei funcții, pe care-l vom presupune situat deasupra axei absciselor. Să presupunem acum că putem alege două puncte x_1 și x_2 în $[a, b]$, în așa fel încît derivata lui f în x_1 este mult mai mică în valoare absolută decît în x_2, cu alte cuvinte panta graficului este mult mai mică în punctul $(x_1, f(x_1))$ decît în punctul $(x_2, f(x_2))$. Fie acum un număr

pozitiv δ astfel încît intervalele $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ și $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ să fie disjuncte și conținute în $[a, b]$. Este clar că subgraficul corespunzător intervalului $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ este aproximat de dreptunghiul de bază $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ și înălțime $f(x_1)$ mult mai bine decît este aproximat subgraficul asociat intervalului $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ de dreptunghiul de bază $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ și înălțime $f(x_2)$. Acest fapt conduce în mod natural la ideea că este mai bine ca valoarea lui δ să nu fie aceeași în cele două cazuri, ci mai mare în cazul lui x_1 și mai mică pentru intervalul centrat în x_2. Aceasta înseamnă o inversare a ordinei operațiilor: în loc să considerăm, ca în teoria tradițională, mai întîi o diviziune, apoi punctele intermediare, apare mai avantajos să pornim cu un sistem de puncte ξ_i și să alegem apoi punctele diviziunii, în așa fel încît lungimea intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ care-l conține pe ξ_i să fie o funcție de ξ_i; mai precis, alegînd o funcție strict pozitivă δ, vom spune că *diviziunea punctată* p (în notația de mai sus) *a lui* $[a, b]$ *este compatibilă cu funcția* δ, dacă pentru orice i, $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, diferențele $\xi_i - x_i$ și $x_{i+1} - \xi_i$ sînt inferioare lui $\delta(\xi_i)$.

RECUPERAREA FORMULEI LUI LEIBNIZ ȘI NEWTON PENTRU DERIVATE FINITE ARBITRARE

Am văzut că nu numai integrala Riemann ci și integrala Lebesgue eșuează în încercarea de a integra orice derivată finită. Vom defini acum un tip de integrabilitate care ne permite să depășim această dificultate. Fie f o funcție reală definită pe $[a, b]$. Vom spune că f este *integrabilă Riemann în sens generalizat* pe $[a, b]$ dacă există un număr real I astfel încît oricărui număr strict pozitiv ε îi corespunde o funcție strict pozitivă $\delta(x)$ cu proprietatea că pentru orice diviziune punctată p compatibilă cu funcția $\delta(x)$ avem $|t(f, p) - I| < \varepsilon$. (Amintim că $t(f, p)$ este suma Riemann asociată lui f și lui p). Numărul I se numește *integrala Riemann în sens generalizat a lui* f *pe* $[a, b]$.

Unele comentarii sînt necesare. Mai întîi, este ușor de văzut că denumirea de integrabilitate Riemann în sens generalizat (pe scurt: *integrabilitatea RG*) își capătă o justificare deplină, deoarece în cazul particular în care funcția $\delta(x)$ este constantă se obține condiția ca diviziunea p să fie de normă inferioară dublului lui δ, deci cădem peste integrabilitatea Riemann clasică și, respectiv, integrala Riemann. În ceea ce privește alegerea funcției $\delta(x)$ în cazul

general; este clar că ea se va face în funcție de structura lui f, de exemplu, așa cum am văzut în paragraful precedent, valorile lui $\delta(x)$ vor fi mai mici în puncte pentru care panta graficului lui f în $(x, f(x))$ este mai mare.

Putem acum defini și *integrabilitatea Lebesgue*; ea se definește prin condiția ca atît f cît și funcția valoare absolută $|f|$ să fie integrabile Riemann în sens generalizat. Numărul I devine, în aceste condiții, *integrala Lebesgue a lui* f *pe* $[a, b]$. Integrabilitatea Lebesgue apare astfel ca integrabilitatea absolută în cadrul integrabilității *RG*, ea este față de aceasta din urmă ceea ce seriile absolut convergente sînt în cadrul seriilor convergente. Înțelegem pe această cale și frumusețea, dar și limitarea integrabilității Lebesgue. Ea permite să se integreze orice derivată mărginită (fapt imposibil la integrabilitatea Riemann), dar eșuează în integrarea oricărei derivate finite și ratează fenomenul de integrare neabsolută, tot așa cum ratăm fenomenul de semiconvergență dacă ne limităm la serii cu termeni pozitivi. Însă seriile cu termeni pozitivi prezintă o regularitate și simplitate (a se vedea, de exemplu, proprietatea lor de comutativitate) pe care seriile cu termeni de semn variabil nu o cunosc (a se vedea, de exemplu, teorema lui Riemann, care afirmă că fiind dată o serie semiconvergentă, adică o serie convergentă pentru care seria valorilor absolute ale termenilor este divergentă, și fiind dat un număr real a, eventual unul din simbolurile ∞ și $-\infty$, există o permutare a termenilor seriei care să conducă la suma a). Tot așa, integrabilitatea Lebesgue este mai bogată în regularități decît integrabilitatea *RG*. Într-o singură problemă, dar o problemă capitală, integrabilitatea *RG* prezintă o regularitate superioară: în problema restabilirii concordanței dintre primitivă și integrală, concordanță preconizată și postulată de Leibniz și Newton, dar pierdută ulterior. Acestui fapt îi vom consacra considerațiile următoare.

Teoremă: *Fie* f *o derivată finită pe* $[a, b]$ *și fie* F *o primitivă a lui* f *pe* $[a, b]$. *In aceste condiții,* f *este integrabilă Riemann în sens generalizat pe* $[a, b]$ *iar valoarea integralei este* $F(b) - F(a)$.

Demonstrație. Fie p o diviziune punctată a lui $[a, b]$ și fie $t(f, p)$ suma Riemann asociată. Vom arăta că diferența $A = F(b) - F(a) - t(f, p)$ devine în valoare absolută inferioară unui număr pozitiv dat ε de îndată ce diviziunea p este compatibilă cu o funcție strict pozitivă convenabil aleasă. Avem $t(f, p) = \Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ și $F(b) - F(a) = \Sigma [F(x_{i+1}) - F(x_i)]$, în ambele sume indicele i parcurgînd

valorile de la 0 la $n-1$, fapt valabil și în continuare, fără a-l mai specifica. Rezultă că $A = \Sigma [F(x_{i+1}) - F(x_i) - f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)]$. Însă $F(x_{i+1}) - F(x_i) = F(x_{i+1}) - F(\xi_i) + F(\xi_i) - F(x_i)$ și $x_{i+1} - x_i = x_{i+1} - \xi_i + \xi_i - x_i$, deci, grupînd termenii în mod convenabil, avem: $A = \Sigma[F(x_{i+1}) - F(\xi_i) - f(\xi_i)(x_{i+1} - \xi_i)] + \Sigma[F(\xi_i) - F(x_i) - f(\xi_i)(\xi_i - x_i)]$.

Fie acum un număr pozitiv ε. În baza faptului că F este derivabilă și are ca derivată pe f, putem folosi observația de la începutul paragrafului anterior, luînd mai întîi $y = x_{i+1}$ și $x = \xi_i$, apoi $y = x_i$ și $x = \xi_i$. Va rezulta existența unui $\delta_\varepsilon(x) > 0$ astfel încît, de îndată ce $\xi_i - x_i < \delta_\varepsilon(\xi_i) > x_{i+1} - \xi_i$, avem $|F(x_{i+1}) - F(\xi_i) - f(\xi_i)(x_{i+1} - \xi_i)| < \varepsilon |x_{i+1} - \xi_i|$ și $|F(x_i) - F(\xi_i) - f(\xi_i)(x_i - \xi_i)| < \varepsilon |x_i - \xi_i|$, deci $|A| = |F(b) - F(a) - t(f, p)| < \Sigma\varepsilon(x_{i+1} - \xi_i + \xi_i - x_i) = \Sigma\varepsilon(x_{i-1} - x_i) = \varepsilon(b - a)$. Să mai observăm că restricția impusă de inegalitățile relative la $\delta_\varepsilon(\xi_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ nu este altceva decît condiția de compatibilitate a diviziunii punctate p cu funcția $\delta_\varepsilon(x) > 0$, deci am obținut următorul rezultat: Fiind dat $\varepsilon > 0$, există o funcție $\delta_\varepsilon(x) > 0$ (de observat că această funcție este furnizată chiar de definiția faptului că F este o primitivă a lui f) cu proprietatea că pentru orice diviziune punctată p a lui $[a, b]$ compatibilă cu $\delta_\varepsilon(x)$ avem $|F(b) - F(a) - t(f, p)| < \varepsilon(b - a)$. Dar aceasta nu este altceva decît integrabilitatea *RG* a lui f pe $[a, b]$ cu diferența $F(b) - F(a)$ drept integrală. *Formula lui Leibniz și Newton este astfel recuperată, cu statut de teoremă, în cazul unei derivate finite f arbitrare.* Acest rezultat remarcabil a fost obținut treptat, începînd cu deceniul al doilea al secolului nostru, prin eforturile conjugate ale unor matematicieni ca Arnaud Denjoy, Oscar Perron, Jaroslav Kurzveil și Ralph Henstock.

CONFRUNTAREA DINTRE SUMELE DARBOUX ȘI CELE RIEMANN

Să ne întoarcem acum la integrala Riemann și să comparăm diferitele moduri de a caracteriza integrabilitatea Riemann. Putem caracteriza aceste modalități din trei puncte de vedere: 1. Din punctul de vedere al tipului de sume utilizate distingem cele bazate pe sume Riemann de cele bazate pe sume Darboux; 2. Din punctul de vedere al modului de a ordona diviziunile, distingem ordonarea după normă de aceea după finețe (o diviziune d_1 este mai fină decît d_2 ($d_2 \subset d_1$) dacă orice punct al lui d_2 este și punct de diviziune al lui d_1); 3. Din punctul de vedere al impli-

cării valorii integralei, distingem caracterizarea integrabilității prin folosirea valorii integralei și caracterizarea fără această folosire. Prin combinarea acestor posibilități (care sînt departe de a fi toate) obținem diferite caracterizări, dintre care reproducem aici cîteva (funcția f este presupusă mărginită pe $[a, b]$): a. Există un număr real I, astfel încît pentru orice șir (d_n) de diviziuni punctate de normă tinzînd la zero avem $\lim t(f, d_n) = I$; b. Există I real astfel încît oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune d punctată de norma inferioară lui δ_ε avem $|t(f, d) - I| < \varepsilon$; c. Pentru orice șir (d_n) de diviziuni punctate ale lui $[a, b]$, de normă tinzînd la zero, șirul $(t(f, d_n))$ este convergent; d. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv δ_ε astfel încît, oricare ar fi diviziunile punctate d_1 și d_2 de normă inferioară lui δ_ε, avem $|t(f, d_1) - t(f, d_2)| < \varepsilon$; e. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune d astfel încît $S(d) - s(d) < \varepsilon$; f. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că dacă norma diviziunii d este inferioară lui δ_ε atunci $S(d) - s(d) < \varepsilon$; g. Integralele Darboux inferioară și superioară I_1 și I_2 sînt egale (amintim că I_1 este $\sup \{s(d)\}$ iar I_2 este $\inf \{S(d)\}$); h. Fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde o diviziune d_ε cu proprietatea că pentru orice diviziune d mai fină decît d_ε avem $S(d) - s(d) < \varepsilon$; i. Punctele de discontinuitate ale lui f formează o mulțime de măsură nulă.

Cele nouă versiuni specificate mai sus sînt echivalente două cîte două. Nu vom putea da aici o demonstrație completă a acestei afirmații, dar o vom justifica parțial. Ideea care stă la baza demonstrației constă în sesizarea comportamentului sumelor Darboux și sumelor Riemann, comportament pe care-l putem rezuma în următoarele puncte: A. Prin trecere de la o diviziune la alta mai fină suma Darboux inferioară nu descrește iar suma Darboux superioară nu crește; B. Orice sumă Riemann asociată diviziunii d este cuprinsă între sumele Darboux asociate lui d; C. Pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice diviziune d a lui $[a, b]$ există o sumă Riemann asociată lui d și inferioară lui $s(d) + \varepsilon$ și există o sumă Riemann asociată lui d și superioară lui $S(d) - \varepsilon$; D. Ca urmare a proprietăților B și C, diferența $S(d) - s(d)$ este supremumul diferențelor de sume Riemann asociate lui d. Pe baza acestor patru observații, putem stabili echivalența celor mai multe dintre cele 9 versiuni de mai sus ale integrabilității Riemann. Am arătat mai sus echivalența dintre (e) și (g) ca și echivalența dintre (b) și (d). Din B rezultă că (f) implică (b) iar din D și din echivalența dintre (b) și (d) deducem că

(b) implică (f). Echivalența dintre (a) și (c) se stabilește în același fel în care demonstrăm că existența limitei finite a unei funcții f într-un punct x este echivalentă cu convergența tuturor șirurilor $(f(x_n))$ pentru care $x_n \to x (x_n \neq x)$. Echivalența dintre (a) și (b) se stabilește în același fel în care demonstrăm că *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel încît pentru* $x \neq a$, $|x - a| < \delta$ *avem* $|f(x) - K| < \varepsilon$ dacă și numai dacă *pentru orice șir* $x_n \to a (x_n \neq a)$ *avem* $\lim f(x_n) = K$.

Am dezvoltat aceste considerații care, într-o anumită măsură, depășesc programele în vigoare, dar care pot interesa cercurile de matematică ale elevilor, deoarece se referă la chestiuni de interes cultural și istoric în educația matematică a elevilor. Matematicienii continuă să discute, nu fără nuanțe polemice, diferitele posibilități de prezentare a integralei. Dacă în unele manuale se preferă sumele Riemann, în altele accentul cade pe sumele Darboux; o pledoarie pentru acestea din urmă se găsește în două articole ale acad. prof. Caius Iacob (*Asupra interesului utilizării sumelor lui Darboux pentru definirea integralei simple în învățămîntul liceal*, I—II, Gazeta Matematică, anul I, 1980, nr. 1 și 2). Se discută mult dacă noțiunile de margine superioară și inferioară (supremum și infimum) trebuie să-și găsească locul în programa școlară. Independent de soluția adoptată (noțiunile au fost incluse în manualul de clasa a XII-a), marginile inferioară și superioară ale unei mulțimi și ale unei funcții sînt noțiuni fundamentale ale Analizei matematice.

DERIVATELE NU AU DISCONTINUITĂȚI DE PRIMA SPECIE

La unul dintre concursurile de admitere în învățămîntul superior din sesiunea septembrie 1982 s-a propus candidaților următoarea problemă: Se consideră funcția $F_a(x)$ egală cu $\cos(1/x)$ pentru x mai mare decît zero și egală cu a pentru $x = 0$. Să se arate că această funcție (care depinde de parametrul a) are primitivă, de exemplu pe intervalul închis $[0, 1]$, dacă și numai dacă $a = 0$.

M-am abătut de la reproducerea textuală a enunțului propus candidaților, dar nu am modificat conținutul propriu-zis al problemei. Am vrut să subliniem esențialul, în dauna accidentalului. Calea propusă de manual pentru a se arăta că o funcție nu are primitivă se referă la una dintre condițiile necesare pentru ca o funcție să aibă pri-

mitivă: condiția de a satisface proprietatea lui Darboux. Dacă B este o condiție necesară pentru ca proprietatea A să fie satisfăcută, atunci negația lui B este o condiție suficientă pentru ca proprietatea non A să aibă loc. Deci dacă o funcție nu are proprietatea lui Darboux pe un interval, ea nu are primitive pe acel interval.

Ce se întîmplă însă dacă funcția are proprietatea lui Darboux? Chestiunea nu mai poate fi tranșată, deoarece printre funcțiile care au această proprietate există atît funcții care au primitivă cît și funcții care nu au primitivă. Funcția care apare în problema propusă mai sus are proprietatea lui Darboux pe $[0, 1]$ pentru orice valoare a parametrului a cuprinsă între -1 și $+1$. Trebuie deci căutată altă cale. Problema este de altfel discutată și în manual, fiind unica problemă de acest fel care figurează acolo.

Trebuie să distingem aici două părți esențial distincte ale problemei. Partea afirmativă constă în a arăta că pentru $a = 0$ funcția considerată are primitivă. Partea negativă revine la faptul că pentru a diferit de zero funcția nu are primitivă. Observațiile care urmează se referă la partea negativă.

Vom stabili mai întîi o proprietate a punctelor de discontinuitate ale funcțiilor care au primitivă. Se știe că punctele de discontinuitate sînt de două feluri: de prima și de a doua specie. De prima specie sînt acele puncte x de discontinuitate pentru care există limita la stînga $f(x-0)$ și limita la dreapta $f(x+0)$ finite. Pentru extremitatea stîngă a intervalului cerem, desigur, numai existența lui $f(x+0)$ iar pentru cea dreaptă existența lui $f(x-0)$. Celelalte puncte de discontinuitate sînt de a doua specie. Fie y la stînga lui x. Aplicînd teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[y, x]$ obținem un punct z_y pentru care: $(f(y)-f(x))/(x-y) = f'(z_y)$ și $y < z_y < x$.

Dacă y parcurge șirul y_n tinzînd la x dinspre stînga, obținem șirul z_{y_n} tinzînd de asemenea la x dinspre stînga, astfel încît

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} (f(y_n) - f(x)/(y_n - x) = \lim_{n\to\infty} f'(z_{y_n}),$$

deci, dacă există $f'(x-0)$, atunci în mod obligatoriu avem $f'(x-0) = f'(x)$.

Un raționament asemănător arată că dacă există $f'(x+0)$, atunci $f'(x+0) = f'(x)$. De aici rezultă că:

Dacă o funcție admite primitivă pe un interval, atunci ea nu are discontinuități de prima specie pe acel interval.

Un corolar imediat al acestei propoziții este:

Dacă o funcție admite o discontinuitate de prima specie pe un interval, atunci ea nu are primitivă pe acel interval.

Am obținut așadar un criteriu de recunoaștere a unor funcții care nu au primitivă. Cum se aplică el la problema aici în discuție? Să presupunem că ar exista a diferit de zero, astfel încît F_a să aibă primitivă pe [0, 1]. Deoarece despre F_0 știm că are primitivă (a se vedea manualul de Analiză matematică de clasa a XII-a) și deoarece diferența a două functii care au primitivă are de asemenea primitivă, rezultă că $F_a - F_0$ are primitivă pe [0, 1]. Însă $F_a - F_0$ este funcția egală cu zero în orice punct, cu excepția originii, unde este egală cu $a \neq 0$. Originea constituie deci un punct de discontinuitate de prima specie pentru $F_a - F_0$; rezultă, conform propoziției stabilite mai sus, că $F_a - F_0$ nu admite primitivă pe [0, 1]. Am obținut astfel o contradicție care arată că F_a nu are primitivă pentru $a \neq 0$.

Se observă că are loc o proprietate mai generală, foarte utilă în aplicații:

Dacă o funcție F admite primitivă pe intervalul I, atunci schimbînd valorile lui F într-un număr finit de puncte din I, se obține o funcție care nu are primitivă pe I.

Există clase întinse de funcții pentru care orice discontinuitate este de prima specie. În această situație se află clasa funcțiilor monotone (crescătoare sau descrescătoare), după cum rezultă ușor din faptul că orice șir monoton are limită (finită sau infinită) și din proprietatea binecunoscută după care, dacă un șir are o limită, atunci orice subșir al său are aceeași limită. Un exemplu frecvent este funcția parte întreagă, definită pentru orice x real ca fiind egală cu cel mai mare întreg care nu depășește pe x. Această funcție este monoton crescătoare și admite, pentru orice valoare întreagă a lui x, o discontinuitate de prima specie; deci nu admite primitivă pe nici un interval de lungime mai mare decît unitatea.

Se poate demonstra — dar aceasta depășește programa școlară — că funcțiile cu proprietatea lui Darboux nu admit discontinuități de prima specie. Funcția F_a nu admite discontinuități de prima specie pe intervalul [0, 1] pentru nici o valoare a lui a, deci nici măcar pentru $|a| > 1$.

Așadar este posibil ca o funcție să fie lipsită de discontinuități de prima specie și totuși să nu aibă proprietatea lui Darboux; această proprietate este mai particulară decît absența discontinuităților de prima specie.

De obicei, este mai uşor de controlat dacă o funcţie admite discontinuităţi de primă specie decît dacă are proprietatea lui Darboux. Mai important este însă faptul că, în timp ce demonstraţia teoremei care afirmă că orice derivată are proprietatea lui Darboux este destul de delicată, teorema privind absenţa discontinuităţilor de prima specie la orice funcţie derivată este o consecinţă imediată a teoremei lui Lagrange a creşterilor finite, aşa cum s-a văzut mai sus.

LOGARITMUL

LOGARITMUL, VECHI ŞI MEREU NOU

Printre cele mai importante noţiuni ale matematicii elementare se află fără îndoială şi noţiunea de logaritm. Inventaţi de scoţianul Neper (J. Napier), baron de Merchiston (1550—1617), logaritmii au avut ca motivaţie iniţială simplificarea operaţiilor aritmetice, prin înlocuirea înmulţirii cu adunarea şi a împărţirii cu scăderea. Încă în urmă cu secole interveneau, în special în Astronomie, operaţii cu numere foarte mari; orice posibilitate de simplificare a lor, într-o vreme în care nu existau încă maşini de calcul, era de o deosebită importanţă. S-ar putea crede că acum, în era calculatoarelor electronice, logaritmii n-ar mai trebui să prezinte prea mare însemnătate, ei fiind compensaţi de viteza de milioane de operaţii pe secundă a calculatoarelor moderne. Nu s-a întîmplat aşa. Pe de o parte, numerele care intervin în calculele ştiinţifice şi tehnice sînt din ce în ce mai mari, iar operaţiile din ce în ce mai complicate; pe de altă parte, faţă de motivaţia iniţială a logaritmilor au apărut numeroase motivaţii noi, care nici măcar nu puteau fi bănuite de către inventatorul lor. Funcţia logaritmică apare în cele mai neaşteptate împrejurări, în Analiza matematică şi în Teoria numerelor, în Fizică şi în Chimie, în Biologie şi Psihologie, în Lingvistică şi Informatică, în Sociologie şi în studiul literaturii şi artei. Sub aspect strict matematic, logaritmul prezintă multe aspecte derutante, care pun în dificultate pe începători. Probabil acesta este motivul pentru care logaritmul a devenit o prezenţă aproape permanentă la probele de matematică de la concursurile de admitere în învăţămîntul superior. Am în faţă volumul *Culegere de probleme rezolvate pentru admiterea în învăţămîntul superior* (Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1984), incluzînd toate chestiunile propuse în perioada 1980—1983. Logaritmul nu a lipsit în nici un an, fiind prezent în forme dintre cele mai variate: studiul unor inegalităţi, comportamentul logaritmului faţă de schimbarea bazei, implicarea sa în expresia unei funcţii care trebuie studiată

sub aspectul continuității sau al derivabilității (de multe ori, logaritmul intervine în funcții definite prin acolade, adică prin expresii diferite pe unul sau altul dintre subintervalele intervalului de definiție) sau din punctul de vedere al variației și reprezentării ei grafice. Logaritmul a fost prezent din plin și la concursurile de admitere din 1984 și 1985. Faptul acesta nu este deloc întîmplător. Capcanele logaritmului oferă totdeauna posibilitatea de a testa sagacitatea și discernămîntul candidaților. Logaritmul te obligă mereu să-l gîndești „de la rădăcină", adică de la definiție, el nu prea se lasă prins în procedee de rutină.

LOGARITMUL, CA PROBLEMĂ DE ANALIZĂ

Definiția logaritmului este foarte simplă. S-o amintim: Se numește logaritm al lui a în baza b puterea la care trebuie ridicat b pentru a-l obține pe a. Presupunînd pe a pozitiv (așa cum s-a procedat în operația de ridicare la putere de exponent real arbitrar), este clar că logaritmul există numai dacă b este și el pozitiv (indiferent de semnul exponentului, o putere de bază pozitivă este un număr pozitiv), deci *numerele negative nu au logaritm*. Nu e greu de văzut că nici zero nu are logaritm. Se arată însă că orice număr real strict pozitiv are logaritm (în orice bază strict pozitivă) iar logaritmul lui unu este egal cu zero în orice bază. Lucrurile par simple. De unde vine atunci natura mai deosebită a noțiunii de logaritm? De unde provin capcanele lui? Să observăm mai întîi că, din punct de vedere istoric, apariția logaritmilor este esențial legată de numărul e și de ideea de progresie (aritmetică sau geometrică). Logaritmii atribuiți lui Neper sînt *logaritmii naturali* (notați cu ln), desemnîndu-se prin aceasta logaritmii în baza e. Să ne amintim că acest număr se definește ca limită, pentru $n \to \infty$, din puterea de exponent n a lui $1 + 1/n$. În Analiza matematică, este nevoie de un efort deloc neglijabil pentru a se arăta că acest șir este convergent (se folosește teorema după care un șir crescător și mărginit este convergent), rezultat fără de care nu putem vorbi despre limita acestui șir ca despre un număr real (pe care convenim să-l notăm cu e). Istoria numărului e este și ea complicată. Se știa că este irațional, dar abia în secolul trecut s-a arătat că este transcendent (adică nu este un număr algebric).

O întrebare devine imediat inevitabilă. Cum a ajuns Neper la ideea de a alege numărul e ca bază a logaritmilor?

De ce este el considerat baza *naturală*? De ce este preferat, ca bază, oricărui alt număr? Să nu uităm că printre candidații la o bază naturală ar putea fi și numărul 10 (logaritmii zecimali, notați cu *log*, sînt practici în o serie de calcule) iar în teoria matematică a informației, care s-a născut și s-a dezvoltat în secolul nostru, apare, în expresia cantității de informație, un logaritm în baza 2.

Fără lămurirea chestiunii de mai sus, nu se poate vorbi de o reală asimilare a ideii de logaritm. Să reconstituim deci gîndirea lui Neper, ținînd, evident, seama de limbajul matematic modern și de achizițiile Analizei matematice (pe vremea lui Neper, calculul diferențial și integral nu exista încă iar ideea de șir convergent avea să se cristalizeze și ea mult mai tîrziu). Datorez această reconstituire profesorului meu, regretatul academician Miron Nicolescu (a se vedea și lucrarea sa *Analiza matematică*, vol. 1, Editura Tehnică, 1957, p. 263—264).

DE CE ESTE NUMĂRUL *e* BAZA LOGARITMILOR NATURALI?

Să considerăm două progresii; una geometrică avînd drept prim termen pe 1 iar rația q mai mare decît 1; alta aritmetică, avînd pe zero ca prim termen. Să notăm cu r rația progresiei a doua. Termenul de rang $n + 1$ este, în prima progresie, q^n iar în a doua progresie nr. Realizăm chiar aici faptul că produsul a doi termeni q^m și q^n din progresia geometrică se asociază în mod natural cu suma $mr + nr$ a termenilor de rang corespunzător în progresia aritmetică. Se obține astfel posibilitatea de a reduce operația de produs la aceea mai simplă de adunare. Însă de această posibilitate beneficiază numai acele numere care sînt termeni ai progresiei geometrice. Cum să facem să oferim această șansă la cît mai multe numere? Ajungem astfel în mod natural la ideea de a alege rația q cît mai apropiată de 1, deci de forma $1 + 1/n$ cu n cît mai mare. Presupunînd că $r = 1/n$ (deci că între 0 și 1 sînt intercalați n termeni ai progresiei aritmetice), progresia aritmetică devine $0, 1/n, 2/n, \ldots, 1, 1+1/n, \ldots$ Să începem să punem în legătură rațiile celor două progresii. Deoarece am impus progresiei geometrice proprietatea de a fi crescătoare (într-adevăr, la aceasta revine faptul că rația ei e superioară unității), putem pune pe q sub forma $q = 1 + 1/n$, așa cum am dorit mai sus. Să urmărim în continuare legătura dintre termenii de același rang din cele două progresii. Progresia geometrică se pre-

zintă sub forma puterilor succesive (de exponent natural) ale lui $1 + 1/n$, primul termen fiind 1, deci puterea de exponent zero a binomului considerat. Progresia aritmetică se prezintă sub forma $0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1, 1+1/n, 1+2/n, \ldots$, Neper numește logaritm al unui termen din progresia geometrică termenul de același rang din progresia aritmetică; tot el numește bază a logaritmilor acel termen al progresiei geometrice al cărui logaritm este egal cu unitatea. Însă unitatea este termenul de rang $n + 1$ în progresia aritmetică, deci ea este logaritmul termenului de rang $n + 1$ al progresiei geometrice, termen egal cu puterea de exponent n a lui $1 + 1/n$. Este ușor de văzut că ridicînd această bază la puterea zero obținem pe 1; ridicînd-o la puterea $1/n$, obținem pe $1 + 1/n$; ridicînd-o la puterea $2/n$, obținem puterea de exponent 2 a lui $1 + 1/n$ ș.a.m.d.

Se observă de pe acum că ne aflăm, ca să spunem așa, în preajma numărului e; într-adevăr, baza logaritmilor, în convenția de mai sus, este tocmai expresia termenului general al șirului care converge către e. Însă în stadiul în care ne aflăm beneficiază de privilegiul de a avea logaritmi numai numerele pozitive care au calitatea de termen al progresiei geometrice considerate. Constatăm că, într-adevăr, așa cum și-a propus Neper, produsul a doi termeni ai progresiei geometrice considerate are ca logaritm suma termenilor corespunzători din progresia aritmetică. Cu cît va fi n mai mare, cu atît vor beneficia mai multe numere pozitive de avantajul de a putea fi logaritmate, deci de a putea reduce, pentru ele, produsul la o adunare. De aici, ideea naturală de a examina ce se întîmplă cu baza logaritmilor atunci cînd $n \to \infty$. Numărul e apare astfel cu stringentă necesitate, drept baza naturală a logaritmilor. Pe vremea lui Neper, noțiunea de șir convergent și aceea de limită a unui șir nu erau încă riguros cristalizate, de aceea nu se putea avansa prea mult în studiul logaritmului. Un continuator al lui Neper, anume Briggs, a efectuat trecerea de la baza e la baza 10, mai convenabilă pentru sistemul zecimal de reprezentare a numerelor, tocmai introdus atunci. Totuși, pentru Analiza matematică baza e a logaritmilor își menține și acum importanța ei covîrșitoare.

ARHIMEDE, PRECURSOR AL LOGARITMILOR

Fiind dat un număr pozitiv a, putem pune în corespondență progresia aritmetică (1): $\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ cu progresia geometrică (2), formată cu puterile

întregi ale lui a, în așa fel încît exponentul din fiecare putere este numărul întreg asociat ca termen al progresiei aritmetice, termen care va fi logaritmul puterii respective în baza a. Putem extinde această corespondență și la puteri de exponent rațional, considerînd pe p/n logaritmul puterii de bază a și de exponent p/n. În matematica elementară, această operație este cunoscută sub numele de inserare a unui număr de medii geometrice între doi termeni din (2) și a mediilor aritmetice asociate între termenii din (1). Aceste proprietăți ale progresiilor aritmetice și geometrice considerate în corespondență au fost stabilite încă de Arhimede. De aici la logaritm nu-i decît un pas, dar tocmai acest pas Arhimede nu l-a mai făcut, probabil datorită naturii simbolurilor literale folosite în antichitate pentru desemnarea numerelor. Semnificația acestor simboluri era atunci absolută, astfel încît numere foarte apropiate erau deseori exprimate prin notații care nu lăsau să se vadă aceasta. Această dificultate a putut fi depășită pe vremea lui Neper. Avem aici un exemplu care arată cît de importantă poate fi influența sistemului de notație asupra evoluției unor idei matematice. Neper a fost primul în Europa care a folosit această generalizare atît de simplă în modul de scriere a subdiviziunilor zecimale, generalizare care era indispensabilă pentru efectuarea scăderilor succesive și menținerea lor în limite de eroare stabilite în prealabil.

LOGARITMUL, ÎN PERSPECTIVĂ AXIOMATICĂ

Cunoștințele de Analiză matematică pe care le dobîndește azi un elev îi permit să înțeleagă funcția logaritmică și dintr-o altă perspectivă. Să plecăm, ca și Neper, de la problema căutării unei funcții care reduce produsul a două numere pozitive la o adunare. Căutăm deci o funcție $f\colon (0, \infty) \to R$ cu proprietatea (1) $f(xy) = f(x) + f(y)$. Pentru a putea beneficia de cît mai multe posibilități teoretice și practice, să căutăm funcții f cu proprietatea de mai sus printre funcțiile derivabile. Mai întîi să observăm că pentru $x = y = 1$ obținem $f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, deci $f(1) = 0$, cu alte cuvinte, dacă numim *logaritm* o funcție cu proprietățile căutate, logaritmul lui 1 este egal cu zero. Să derivăm acum ambii membri ai relației funcționale (1), odată în raport cu x, a doua oară în raport cu y. Obținem, după regula de derivare a funcțiilor compuse $yf'(xy) = f'(x)$ și $xf'(xy) = f'(y)$, deci $(f'(x)/y = (f'(y))/x$, adică $xf'(x) = yf'(y)$. Aceasta

înseamnă că există o constantă k cu proprietatea $f'(x) = k/x$ pentru orice $x > 0$. Se observă că $f'(x)$ este de semn constant pe $(0, +\infty)$, deci f este strict monotonă. Fiind și derivabilă, ea este inversabilă, inversa fiind și ea strict monotonă și derivabilă; s-o notăm cu $e(x)$. Valoarea acestei funcții pentru $x = 1$ este numărul e (acest enunț poate fi luat ca definiție a lui e; ea conduce la același număr ca și calea anterioară). Definiția este perfect echivalentă cu cerința ca ln să ia valoarea 1; într-adevăr, a spune că $e(1) = e$ este tot una cu a spune că $\ln e = 1$. Este tocmai proprietatea care definea, la Neper, baza logaritmilor naturali.

Graficul derivatei lui f (pentru $k = 1$) este ramura din primul cadran a hiperbolei echilatere $xy = 1$. Deoarece această derivată este o funcție descrescătoare, rezultă că graficul logaritmului va fi o funcție concavă; punînd $e(x) = e^x$, cum se obișnuiește, rezultă că e^x este o funcție crescătoare și convexă, graficul ei fiind simetric cu cel al lui $\ln x$ față de prima bisectoare a axelor.

Din faptul că $\ln x$ este o funcție crescătoare și că $\ln e = 1$, rezultă că numerele din intervalul $(0, e)$ au logaritmul în intervalul $(-\infty, 1)$; însă $\ln 1 = 0$, deci numerele pozitive subunitare au logaritm negativ, iar cele cuprinse între 1 și e au logaritm pozitiv, dar subunitar.

CREȘTEREA LOGARITMICĂ

Cele două tipuri de creștere pe care le-am pus în evidență mai sus au o importanță covîrșitoare nu numai în Matematică, ci și în ansamblul culturii umane. Creșterea logaritmică este un simbol al creșterii lente (limita lui $\ln x$ este $-\infty$ cînd $x \to 0$ și $+\infty$ cînd $x \to \infty$) iar creșterea exponențială este un simbol al creșterii rapide. Există însă o infinitate de tipuri de creștere logaritmică: $\ln x$, $\ln(\ln x)$, $\ln(\ln(\ln x))$ etc. din ce în ce mai lente și o infinitate de tipuri de creștere exponențială e^x, e la puterea e^x ș.a.m.d., un șir infinit în care fiecare termen este o putere de bază e și de exponent egal cu puterea precedentă. Aceste creșteri sînt din ce în ce mai rapide. Intermediare față de ele sînt creșterile de tip polinomial $x, x^2, \ldots, x^n \ldots$ În informatică, este esențial să se știe, pentru a decide valoarea practică a unui algoritm, dacă el lucrează în timp exponențial, polinomial sau logaritmic (este vorba de funcția $t(n)$ care exprimă timpul maxim de prelucrare a unei secvențe de intrare de lungime n). Evident, algoritmii care lucrează în timp logaritmic sînt

cei mai buni. În multe situații ne mulțumim însă și cu un timp polinomial și nu lipsesc nici cazurile în care se dovedește util și un algoritm care lucrează în timp exponențial.

Dar problema vitezei cu care o funcție crește a apărut de multă vreme, chiar în Matematica fundamentală. De exemplu, se știe că șirul de termen general $1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ crește tinzînd către infinit. Euler a arătat că această creștere este de natură logaritmică; mai precis, a demonstrat că există un număr real C (numit de atunci *constanta lui Euler*) astfel încît șirul de termen general $(1 + 1/2 + \ldots + 1/n) - \ln n$ să tindă la C cînd $n \to \infty$. Despre seria armonică alternată $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ se știe că este convergentă și are ca sumă pe $\ln 2$.

La începutul secolului al XIX-lea, K. F. Gauss a emis ipoteza că numărul $p(n)$ al numerelor prime care nu întrec pe n tinde la ∞ la fel de repede ca și $n/\ln n)$; mai precis, șirul de termen general $(p(n))((\ln n)/n)$ are ca limită pe 1. Această ipoteză a putut fi demonstrată abia la sfîrșitul secolului trecut, de către Jacques Hadamard și Charles de la Vallée Poussin, prin metode de teoria funcțiilor de o variabilă complexă. Abia spre mijlocul secolului nostru Paul Erdös a obținut o demonstrație directă (adică prin mijloace exclusive de teoria numerelor) a acestei teoreme.

LOGARITMUL ÎN FIZICĂ ȘI CHIMIE

Importanța practică a logaritmului nu se reduce la simplificarea calculelor. Funcția logaritmică s-a dovedit a fi fundamentală atît în științele naturii cît și în relațiile omului cu lumea. Să presupunem că ne aflăm în prezența unui fenomen descris printr-o funcție f care asociază unei variabile numerice x o variabilă numerică y: $y = f(x)$. Pentru numeroase fenomene naturale se constată experimental (calculele necesare în acest scop pot fi foarte complicate; de aceea se procedează de obicei la o verificare grafică, curba reprezentînd fenomenul fiind înlocuită cu o linie dreaptă. Pentru aceasta se folosesc coordonate semilogaritmice, în sensul că variabila x este reprezentată normal iar în loc de y îl reprezentăm pe $\ln y$) că rata de variație a valorii $y = f(x)$ este proporțională cu y, cu alte cuvinte derivata lui f este proporțională chiar cu f. Obținem astfel relația $y' = ky$, care conduce imediat la o relație de tipul (1): $\ln(y/y_0) = k(x - x_0)$ sau, sub o altă formă, (2) $y = y_0 \exp k$

$(x - x_0)$, unde prin $\exp k(x - x_0)$ am notat puterea de exponent $k(x - x_0)$ a numărului e, iar $y_0 = f(x_0)$.

Iată unele cazuri particulare importante ale situației generale descrise mai sus. 1) *Dezintegrarea substanțelor radioactive.* Numărul de atomi de radium care se dezintegrează într-un anumit interval temporal este proporțional cu numărul acestora la fiecare moment. Rezultă că descreșterea numărului lor, deci a masei totale, ascultă de o lege exponențială. 2) *Absorbția razelor X.* 3) *Descărcarea unui condensator într-o rezistență.* 4) *Presiunea atmosferică în funcție de altitudine.* 5) *Legea răcirii a lui Newton.* Fie T temperatura uniformă, funcție de timpul t, a unei substanțe aflate într-un mediu de temperatură constantă T_0. Legea lui Newton afirmă că, punînd $y = T - T_0$, avem $dy/dt = ky$. 6) *Funcții termodinamice relative la gaze perfecte,* cea mai importantă fiind entropia. Numeroase aplicații se referă la Chimie. 7) *Legea acțiunii de masă pentru o reacție de echilibru între gaze perfecte.* 8) *Studiul electroliților.* Constantele legii acțiunii de masă pentru echilibrele de disociație sînt foarte slabe. O constantă de acest fel este de obicei reprezentată sub forma unei puteri a lui 10 și se notează cu *pk* cologaritmul constantei respective (adică logaritmul în baza 10 al inversului ei). De exemplu, pentru echilibrul de disociație al acidului carbonic CO_3H_2 constanta legii de acțiune de masă este puterea de exponent $-6{,}4$ a lui 10, deci $pk = 6{,}4$. Alt exemplu este *indicele lui Soerensen* pH. Aciditatea unei soluții se măsoară prin concentrația în ioni H^+. Deoarece concentrația (adică raportul dintre numărul de molecule și volumul ocupat) lui H^+ este un număr foarte mic, se preferă să se evalueze aciditatea prin cologaritmul pH în baza 10 al acestui număr. 9) *Viteza unor reacții.* Într-o ecuație chimică exprimînd o reacție de primul ordin (deci în care primul membru conține o singură moleculă), creșterea în intervalul de timp Δt, a concentrației x în funcție de timp a corpului figurînd în primul membru este proporțională cu concentrația corpului netransformat și cu durata Δt și este negativă. Deci, dacă notăm prin k o constantă pozitivă, sîntem conduși să numim viteză de reacție numărul $v = -dx/dt = kx$, de unde rezultă $x = x_0 \cdot \exp(-kt)$, unde x_0 este concentrația în momentul inițial.

Intervenţia logaritmului în medicină rezultă, în mare măsură, din folosirea logaritmului în o serie de domenii pe care se bazează medicina: chimie, biochimie, biologie, roentgenologie etc. Astfel, în biologie numărul $y(t)$ al bacteriilor incluse într-o cultură este funcţie de timp. În condiţii de omogenitate, orice grup format dintr-un număr determinat de bacterii creşte, într-un timp dat, cu o aceeaşi cantitate, deci rata de variaţie dy/dt este proporţională cu y.

Numeroase aplicaţii ale logaritmului intervin în diferite ramuri ale medicinei: în studiul agresiunii organice, în fenomenele de contracţie muşchiulară şi de influenţă a lor asupra oboselii, insomniei şi anxietăţii, în cercetarea influenţei somnului asupra excitabilităţii neuromusculare, în radiologie etc.

Logaritmul apare de o manieră naturală în studiul selecţiei naturale în lumea speciilor biologice. Să presupunem că avem două tipuri competitive A şi B şi să notăm cu u_n raportul dintre numărul de indivizi de tipul A şi numărul de indivizi de tipul B, după n generaţii. Se constată că, în anumite condiţii, există o constantă k astfel încît $kn = \ln(u_n/u_0)$. Constanta k se numeşte *coeficientul de selecţie*. Cercetări de acest fel au fost efectuate de R. A. Fisher, S. Wright şi J. S. Haldane.

În secolul trecut, E. H. Weber şi Gustav Fechner au pus bazele psihofizicii, domeniu care se ocupă de aspectele psihologice ale fenomenelor fiziologice. Ei au pus în evidenţă o relaţie importantă între stimuli şi senzaţii, care se exprimă printr-o egalitate de forma $S = k \ln(R/r)$, unde R exprimă intensitatea stimulului, S este intensitatea senzaţiei de reacţie la R, r este valoarea lui R pentru care $S = 0$ iar k este o constantă. Cu alte cuvinte, senzaţia este logaritmul stimulului. Putem deci spune că omul domoleşte ritmurile naturii, prin logaritmare.

O altă utilizare importantă a logaritmului are loc în teoria informaţiei. Informaţia obţinută prin precizarea unei variante dintre n variante egal probabile este logaritmul lui n în baza 2, pe care-l mai putem reprezenta prin minus logaritm în baza 2 din $1/n$. Într-adevăr, dacă, de exemplu, am de căutat numele MARIAN într-o carte de telefon pe care o presupunem de 512 pagini, pot adopta următoarea strategie. Deschid cartea la jumătate (p. 256), constat că numele căutat se află în jumătatea a doua, deschid a doua jumătate la mijloc (p. 384) şi aşa mai departe, după 9 astfel

de operații voi identifica pagina căutată; numărul 9 este aici tocmai logaritmul lui 512 în baza 2. Unitatea de măsură a informației este aici bitul, adică informația obținută prin precizarea unei variante din două variante egal posibile. Pe această idee, datorată lui R. V. Hartley (1928), s-a bazat definiția lui Claude Shannon pentru cantitatea de informație (1948). Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rezultatele posibile ale unei experiențe și fie p_i probabilitatea de apariție a rezultatului r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dacă toate rezultatele ar avea aceeași probabilitate p, atunci, conform raționamentului lui Hartley, cantitatea de informație furnizată de experiența în discuție ar fi minus logaritm în baza 2 din probabilitatea p (semnul minus asigură pozitivitatea rezultatului final, deoarece p este pozitiv subunitar, deci logaritmul său este negativ). Deoarece însă rezultatele au probabilități diferite, va trebui să considerăm media ponderată a expresiilor $-\log p_i$, cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, cu alte cuvinte cantitatea de informație va fi raportul dintre suma termenilor de forma $-p_i \cdot \log_2 p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și suma $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$. Însă suma din urmă este egală cu unitatea, deci rezultatul final este $-p_1 \log_2 p_1 - \ldots - p_n \log_2 p_n$. (Pentru detalii în această chestiune, se poate consulta cartea *Introducere în lingvistica matematică* (capitolul VIII), pe care am publicat-o, în colaborare, la Editura Științifică, în 1966).

Alte intervenții interesante ale logaritmului se referă la timpul psihologic (subiectiv), care, după anumite ipoteze, este logaritmul timpului cronologic. Am discutat pe larg această chestiune în cărțile *Semne despre semne* (Editura Științifică și Enciclopedică, 1979, p. 75—81), unde ne ocupăm și de percepția logaritmică a lumii și, mai ales, în *Timpul* (Editura Albatros, 1985, p. 219—228).

SUBTILITĂȚI ALE ANALIZEI MATEMATICE

O TANGENTĂ BIZARĂ

Se știe care este interpretarea geometrică a derivatei unei funcții f într-un punct x; este panta (coeficientul unghiular) tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă x și de ordonată $f(x)$. Nu totdeauna însă această interpretare admite suportul intuitiv cu care sîntem atît de familiarizați. Să considerăm, de exemplu, funcția f definită prin $f(x) = x - 1$ pentru $x < 0$, $f(x) = x + 1$ pentru $x > 0$ și $f(0) = 0$. Originea este un punct de discontinuitate pentru f (avem $f(0-0) = -1$, $f(0+0) = 1$, deci f este discontinuă în origine atît la stînga cît și la dreapta, totuși f are derivată în origine, egală cu plus infinit. Aceasta înseamnă, din punct de vedere geometric, existența și verticalitatea tangentei la graficul lui f în punctul $(0, 0)$. Cu alte cuvinte, tangenta în $(0, 0)$ la graficul lui f este dreapta $x = 0$, adică axa ordonatelor. În celelalte puncte ale sale, graficul lui f admite de asemenea tangentă. Dacă $x < 0$, atunci tangenta în $(x, f(x))$ este dreapta $y = x - 1$ iar pentru $x > 0$ tangenta în $(x, f(x))$ este dreapta $y = x + 1$. Constatăm astfel că pentru $x \neq 0$ tangenta în $(x, f(x))$ la graficul lui f conține o parte a acestui grafic (tangenta este o dreaptă din care numai o semidreaptă face parte din graficul lui f).

Putem deci spune că în fiecare punct al său graficul lui f admite tangentă, dar această tangentă este antiintuitivă. Pentru $x \neq 0$, ea este antiintuitivă deoarece nu se mulțumește să atingă graficul într-un punct (dublu), ci se identifică cu graficul într-o întreagă vecinătate a punctului, astfel încît obișnuita coardă se confundă cu tangenta, deci aceasta din urmă apare ca o limită degenerată, banală, a celei dintîi. Pentru $x = 0$, tangenta este bizară datorită faptului că într-o vecinătate destul de mică a originii (de exemplu în interiorul unui cerc centrat în origine și de rază inferioară lui unu) nu există nici un punct al graficului, cu excepția originii. Dar „coarda" care unește originea cu un alt punct $(x, f(x))$ al graficului „tinde" către tangenta în origine de îndată ce abscisa x tinde la zero.

Situația de mai sus are și o altă semnificație. Există o anumită neconcordanță între aspectul analitic al derivatei și aspectul ei geometric. Din punct de vedere analitic, este o deosebire esențială între derivata finită și cea infinită, prima fiind asociată funcțiilor derivabile (deci cu atît mai mult continue), în timp ce cea de a doua poate exista chiar într-un punct de discontinuitate, ca în exemplul de mai sus. Din punct de vedere geometric însă, deosebirea este neesențială. Indiferent de valoarea ei — finită sau infinită — derivata, dacă există, este coeficientul unghiular al tangentei, în punctul considerat, la graficul funcției. Existența derivatei lui f în x este echivalentă cu existența tangentei în punctul $(x, f(x))$ la graficul lui f. Deosebirea dintre derivata finită și cea infinită revine la deosebirea, neesențială, dintre tangenta neverticală și cea verticală (adică paralelă cu axa ordonatelor).

DOUĂ ASPECTE ALE SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ

Putem gîndi schimbarea de variabilă la integrale din două puncte de vedere, după cum ne orientăm spre primitive sau spre sumele integrale. Un model de tratare din primul punct de vedere este prezentat de Ion Chițescu *(Schimbarea de variabilă. Calcul practic*, Gazeta Matematică, 1983, nr. 5, p. 188—197). Fie g o aplicație derivabilă, cu derivată continuă pe intervalul real I și avînd valori în intervalul real J. Fie f o funcție reală, continuă pe J. În aceste condiții, oricare ar fi a și b în I, avem

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Funcțiile care apar sub integrale sînt continue, deci integralele respective există. Tot din continuitatea lor rezultă că ele au primitive. Este suficient acum să observăm că dacă $F: J \to R$ este o primitivă a lui f, atunci compunerea lui F cu g conduce pe I la o primitivă a funcției care asociază fiecărui x din I valoarea $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Este adecvat acum să aplicăm formula lui Leibniz și Newton, pentru a obține

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, \mathrm{d}x = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Pe această cale se poate calcula integrala de la 0 la $\pi/2$ din funcția $\sin^n x \cos x$, unde n este un număr natural. Într-adevăr, pentru $I = J = R$, $g(x) = \sin x$ și $f(t) = t^n$ avem $f(g(x)) \cdot g'(x) = \sin^n x \cos x$ iar pentru $a = 0$, $b = \pi/2$ obținem $g(a) = \sin 0 = 0$, $g(b) = \sin(\pi/2) = 1$, deci integrala care ne interesează revine la integrala de la 0 la 1 a lui t^n, adică este egală cu $1/(n + 1)$.

SCHIMBAREA DE VARIABILĂ ȘI SUMELE RIEMANN

O altă cale are la bază ideea următoare. Schimbarea de variabilă într-o integrală este văzută ca un caz-limită al schimbării de variabilă în sumele care conduc la integrală. Fie o diviziune $d: a = x_0 < \quad < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ a intervalului $[a, b]$ și fie g o funcție strict crescătoare și continuă pe $[\alpha, \beta]$, cu $g(\alpha) = a$ și $g(\beta) = b$. În aceste condiții, g este chiar o bijecție între $[\alpha, \beta]$ și $[a, b]$ și există o diviziune $\delta: \alpha = t_0 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = \beta$ pentru care $g(t_i) = x_i$ pentru $0 \leqslant i \leqslant n$. În baza continuității uniforme a lui g pe $[\alpha, \beta]$, rezultă că fiind dat $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ astfel încît din $|t_1 - t_2| < \eta$ să rezulte $|x_1 - x_2| = |g(t_1) - g(t_2)| < \varepsilon$, deci dacă norma diviziunii δ este inferioară lui η, atunci norma diviziunii d este mai mică decît ε. În aceste considerații, rolurile lui $[\alpha, \beta]$ și $[a, b]$, ale lui δ și d se pot inversa, deoarece inversa lui g este și ea o funcție continuă și strict crescătoare. Rezultă astfel că dacă δ parcurge un șir convenabil de diviziuni ale lui $[\alpha, \beta]$ de normă tinzînd la zero, șirul corespunzător de diviziuni d ale lui $[a, b]$ tinde și el în normă la zero și reciproc.

Să presupunem acum că funcția g de mai sus este, în plus, derivabilă pe $[\alpha, \beta]$ și fie f o funcție reală, continuă pe $[a, b]$. Există, pentru $x_i \leqslant \xi \leqslant x_{i+1}$, un număr τ_i între t_i și t_{i+1}, astfel încît $g(\tau_i) = \xi_i$, deci $(x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) = (g(t_{i+1}) - g(t_i)) \cdot f(g(\tau_i))$. Aplicînd formula lui Lagrange, obținem existența unui punct intermediar t_i', $t_i \leqslant t_i' \leqslant t_{i+1}$, astfel încît $g(t_{i+1}) - g(t_i) = (t_{i+1} - t_i)\, g'(t_i')$. Luînd $\tau_i = t_i'$, obținem, notînd $\overline{\xi}_i = g(t_i')$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{\xi}_i)\,(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(g(t_i')) \cdot g'(t_i')\,(t_{i+1} - t_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} G(t_i')\,(t_{i+1} - t_i),$$

unde $G(t) = f(g(t))\, g'(t)$ este o funcție continuă, deci integrabilă pe $[\alpha, \beta]$. Ținînd seamă de faptul că dacă una dintre diviziunile δ și d tinde în normă la zero, și cealaltă are aceeași proprietate, rezultă teorema:

Dacă f este continuă pe $[a, b]$ iar g este strict crescătoare și derivabilă, cu derivată continuă pe $[\alpha, \beta]$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, atunci

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t) \mathrm{d}t.$$

Pentru ilustrare, să considerăm integrala

$$\mathrm{I} = \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\, \mathrm{d}x,$$

unde $f(x) = \sqrt{x}/(1 + \sqrt{x})$ este continuă pe $[1, 4]$. În rolul funcției g luăm $g(t) = t^2$, evident strict crescătoare, derivabilă, cu derivată continuă pe $[1, 2]$ și astfel încît $g(1) = 1$, $g(2) = 4$. Putem deci aplica teorema de mai sus și obținem

$$\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{t}{1 + t} 2t\, \mathrm{d}t = 2\int_1^2 \frac{t^2 - 1 + 1}{t + 1}\, \mathrm{d}t = 2\int_1^2 (t - 1)\, \mathrm{d}t +$$

$$+ 2\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t} = (t - 1)^2 \Big|_1^2 + 2 \ln (1 + t) \Big|_1^2 = 1 + 2(\ln 3 -$$

$$- \ln 2) = 1 + 2 \ln (3/2).$$

Sub orice formă ar fi aplicată, schimbarea de variabilă într-o integrală are în vedere calculul integralei cu ajutorul formulei lui Leibniz și Newton, deci vizează folosirea funcției primitive. Dacă funcția de integrat are o primitivă incomodă, atunci, printr-o schimbare de variabilă, urmărim să obținem o funcție a cărei primitivă se stabilește mai ușor.

GREȘELI CARE CONDUC LA PROBLEME INTERESANTE

Noțiunile Analizei Matematice comportă formulări delicate, instabile, care la cea mai mică neatenție sau neînțelegere pot trăda sensul care a fost avut în vedere. Trei tipuri de elemente atrag atenția în aceste formulări; modulul, inegalitățile și cuantificatorii logici (universali sau existențiali). De-a lungul anilor, dialogul cu începătorii în domeniul Analizei, cu prilejul examenelor sau cu alte prilejuri, a pus

în evidență diferite formulări lacunare ale definițiilor unor noțiuni fundamentale. Lacunele se referă tocmai la cele trei aspecte amintite mai sus, adică la omiterea modulului, la inversarea sensului corect al unor inegalități și, mai ales, la folosirea cuantificatorilor logici *există* și *orice*.

Cîteva dintre problemele care iau naștere în acest fel au fost propuse candidaților la concursul profesional științific studențesc de matematică, anul întîi, profil universitar, etapa finală (Timișoara, 1986) și este instructiv să facem publică această experiență. După cum se va vedea, problemele au în vedere cunoștințele relativ rudimentare privind cîteva dintre noțiunile de bază ale Analizei și nu comportă nici un fel de complicații tehnice, nici măcar calcule elementare. Pretind, însă, în schimb, gîndire matematică, înțelegerea aspectului procesual al definițiilor de analiză, o anumită familiaritate cu logica lui *există*, *orice* și *implică*.

Cele cinci probleme care urmează provin din denaturări neintenționate ale definiției continuității uniforme, concept important, introdus în manualul de clasa a XII-a și folosit în demonstrarea unei teoreme importante: Orice funcție continuă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$. Pe un interval închis și mărginit, continuitatea uniformă este echivalentă cu continuitatea obișnuită. Lucrurile se schimbă însă dacă funcția f este definită pe R, cu valori în R. Proprietatea de continuitate uniformă se formulează, în acest caz, în felul următor: Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît dacă $x, y \in R$ și $|x - y| < \delta$, atunci $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. După cum se observă, continuitatea uniformă este o proprietate esențial globală, ea nu se referă la un anumit punct, ci la întregul teritoriu de definiție al funcției. Este ușor de văzut că din continuitatea uniformă pe R rezultă continuitatea în fiecare punct din R; dar reciproca nu este adevărată, după cum se poate vedea din exemplul funcției $f(x) = x^2$, discutat cu altă ocazie.

O PERTURBARE APARENTĂ ȘI UNA REALĂ

Fie mai întîi formularea: a) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există δ strict cuprins între 0 și ε, astfel încît dacă $x, y \in R$ și $|x - y| < \delta$, atunci $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Deosebirea față de formularea obișnuită constă aici în cererea ca δ să fie nu numai strict pozitiv, ci și inferior lui ε. Din proprietatea (a) rezultă, evident, continuitatea uniformă. Este și reciproca adevărată? Da, este, deoarece numărul δ din definiția continui-

tăţii uniforme nu este unic determinat; din existenţa unui $\delta > 0$ cu proprietatea dorită rezultă existenţa a o infinitate de astfel de numere, orice număr δ_1 strict cuprins între 0 şi δ putînd prelua rolul lui δ. Deci, dacă cumva avem $\delta \geqslant \varepsilon$, vom lua ca δ_1 un număr strict pozitiv inferior lui ε; din $0 < \delta_1 < \varepsilon \leqslant \delta$ va rezulta că δ_1 este astfel încît din $|x - y| < \delta_1$ să rezulte $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Concluzia: Formularea (a), deşi formal diferită de definiţia continuităţii uniforme, este perfect echivalentă cu aceasta din urmă.

Să ne referim acum la formularea: *b*) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît dacă $x, y \in R$ şi $x - y < \delta$, atunci $f(x) - f(y)| < \varepsilon$. După cum se observă, autorul involuntar al acestei formulări a omis modulul pentru diferenţa $x - y$. Care sînt funcţiile care îndeplinesc această condiţie? Mai întîi se observă uşor că orice funcţie constantă o satisface, deoarece, în acest caz, expresia care trebuie să devină inferioară lui ε este identic nulă. Este şi reciproca adevărată? Putem spune că orice funcţie f care satisface condiţia (b) este constantă? Să admitem, prin absurd, că ar exista o funcţie f neconstantă, satisfăcînd condiţia (b). În acest caz, ar exista două valori x şi y în R astfel încît $f(x) \neq f(y)$. Să alegem un număr strict pozitiv ε inferior lui $|f(x) - f(y)|$. Putem admite, pentru a face o alegere, că $x < y$. Rezultă astfel că $x - y < \delta$ oricare ar fi numărul pozitiv δ, dar $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$, *în contradicţie cu condiţia* (b). Rezultă că funcţiile constante sînt singurele care satisfac (b). Avem astfel o demonstraţie convingătoare a rolului esenţial pe care-l are modulul diferenţei $x - y$ în formularea continuităţii uniforme. Formularea (b) se transformă într-un experiment edificator, după exemplul experimentelor similare din alte ştiinţe: Pentru a vedea rolul unui anumit element într-un angrenaj, căutăm să vedem ce devine angrenajul respectiv în absenţa elementului considerat.

FUNCŢII MĂRGINITE ŞI CONTRACŢII ÎN SENS LARG

Fie acum formularea c): Există $\varepsilon > 0$ astfel încît, oricare ar fi $\delta > 0$, din $x, y \in R$ şi $|x - y| < \delta$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. După cum se observă, au fost încurcaţi aici cuantificatorii logici, *există* şi *orice*, substituindu-se unul altuia. Dacă funcţia f este mărginită, deci dacă există un număr M astfel încît $|f(x)| < M$ pentru orice x în R, atunci pentru orice x şi y în R avem $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| < 2M$, deci condiţia (c) este satisfăcută, luînd $\varepsilon = 2M$.

Reciproc, să presupunem că f satisface condiția (c), deci că există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea menționată. Oricum am alege două numere reale x și y, există, desigur, un $\delta > 0$ pentru care $|x - y| < \delta$, deci, în conformitate cu condiția (c), $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Condiția (c) implică astfel următoarea proprietate: Există $\varepsilon > 0$, astfel încît, oricare ar fi x și y în R, este satisfăcută inegalitatea $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, cu alte cuvinte oscilația pe R a funcției f nu întrece pe ε; funcția f este deci mărginită pe R, deoarece, fixîndu-l pe y, avem, pentru orice x din R, $f(y) - \varepsilon < f(x) < f(y) + \varepsilon$, deci $|f(x)| < M$, unde M este un număr superior celui mai mare dintre numerile $|f(y) + \varepsilon|$ și $|f(y) - \varepsilon|$.

O formulare care a derutat pe mulți concurenți (și de fapt nici unul nu a tratat-o complet) a fost următoarea: d) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta \geqslant \varepsilon$ astfel încît din x, $y \in R$ și $|x - y| < \delta$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Aici definiția continuității uniforme este perturbată prin condiția $\delta \geqslant \varepsilon$, mai restrictivă decît cea obișnuită $\delta > 0$. Este deci clar că orice funcție care satisface condiția (d) este uniform continuă. Problema este dacă și reciproca are loc. Vom vedea că răspunsul este negativ.

Din condiția (d) rezultă că, pentru orice x, $y \in R$, avem $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$. Într-adevăr, dacă ar exista o pereche x, y pentru care $|f(x) - f(y)| - |x - y| > 0$, atunci, alegîndu-l pe ε strict cuprins între $|x - y|$ și $|f(x) - f(y)|$, ar rezulta $|x - y| < \delta$ pentru orice $\delta \geqslant \varepsilon$, deoarece $|x - y| < \varepsilon$, însă, în contradicție cu condiția (d), am avea $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. Funcțiile f pentru care există o constantă k astfel încît, oricare ar fi x și y, avem $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ se numesc funcții care satisfac condiția lui Lipschitz. După cum se vede, orice funcție cu proprietatea (d) satisface această condiție cu $k = 1$. Reciproc, este evident că orice funcție care satisface condiția lui Lipschitz cu $k = 1$ satisface și proprietatea (d), luînd pe δ egal cu ε.

Rămîne acum să controlăm dacă există o funcție uniform continuă care nu satisface condiția lui Lipschitz cu $k = 1$. Este ușor de văzut că dacă o funcție satisfăcînd această condiție este derivabilă într-un punct, derivata este subunitară în valoare absolută. Va fi deci suficient să dăm un exemplu de funcție uniform continuă, derivabilă, dar cu derivată supraunitară în valoare absolută, în unele puncte, pentru ca să rezulte că această funcție nu satisface condiția (d). Să considerăm în acest scop funcția $f(x) = 2x$. Derivata ei este constant egală cu 2, deci nu este satisfăcută condiția (d). Însă continuitatea uniformă a lui f este ime-

diată. Este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$, pe $\delta = \varepsilon/2$ pentru ca definiția continuității uniforme să fie satisfăcută.

Funcțiile cu proprietatea (d) pot fi numite, în lumina celor de mai sus, contracții în sens larg; dacă însă avem pentru orice x și y inegalitatea strictă $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, obținem contracțiile propriu-zise, numite astfel deoarece o atare aplicație f contractă, micșorează distanțele.

FUNCȚIILE, ÎNTRE NEINTUITIV ȘI IMPOSIBIL

O formulare care a derutat pe mulți concurenți a fost următoarea: e) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît de îndată ce $x, y \in R$, $x \neq y$ și $|x - y| < \delta$, avem $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Se observă că definiția continuității uniforme este aici perturbată la sfîrșit, prin inversarea sensului inegalității față de ε. Cîțiva concurenți (din păcate, nu prea mulți) au văzut aici o soluție frumoasă, căreia nu i se poate reproșa decît faptul că nu este suficient de elementară, în sensul că folosește unele idei și rezultate care depășesc programa școlară.

Să considerăm un interval $I \subset R$ de lungime inferioară lui δ. Din condiția (e) rezultă că, oricum am alege în I două numere distincte x și y, avem $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$, deci în particular $f(x) \neq f(y)$. Rezultă astfel că aplicația f este injectivă pe I, deci se stabilește o bijecție între I și $f(I)$. Însă, ca orice interval real nedegenerat, I este de puterea continuului. În același timp, $f(I)$ este o mulțime izolată, deoarece fiecare număr y din $f(I)$ este o valoare a lui f cu proprietatea că într-un interval centrat în y și de rază inferioară lui $\varepsilon/2$ nu se mai află nici o altă valoare a lui f. Rezultă că $f(I)$, ca mulțime izolată, este cel mult numărabilă. Ajungem astfel la o contradicție, deoarece nu poate exista o bijecție între două mulțimi de puteri diferite. Deducem astfel imposibilitatea existenței unei funcții f: $R \to R$ care să satisfacă proprietatea (e).

Desigur, caracterul numărabil al mulțimii $f(I)$ poate fi stabilit și fără invocarea noțiunii de mulțime izolată și a teoremei care afirmă numărabilitatea mulțimilor izolate. Este suficient să observăm că, pentru orice număr natural n, nu pot exista în $A_n = (-n, n) \cap f(I)$ decît un număr finit de valori diferite ale lui f, a căror diferență în valoare absolută nu coboară sub $\varepsilon > 0$ dat, deci există în I numai un număr finit de puncte ale căror imagini prin f se află

în A_n și sînt la distanță superioară lui $\varepsilon > 0$. Însă $f(I) = \cup \{A_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$, deci în $f(I)$ se află o mulțime cel mult numărabilă de valori care nu coboară sub ε. Notînd această mulțime cu B_ε, rezultă că $f(I)$ este reuniunea numărabilă a mulțimilor numărabile $B_1, B_{1/2}, \ldots, B_{1/p}, \ldots$, deci $f(I)$ este numărabilă, în contrast cu I, care nu este numărabilă.

Putem însă proceda și altfel. Să fixăm un punct y în intervalul compact $I \subset R$. Să punem $E_n = \{x;\ x \in I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant n\}$. Dacă mulțimea E_n ar fi, pentru un anume n, infinită, atunci ar avea un punct de acumulare a în I, deci ar exista în I puncte din E_n la distanță oricît de mică dorim; însă în aceste condiții am găsi numere $x, y \in E_n$ suficient de apropiate pentru ca $|f(x) - f(y)| > n$, în contradicție cu definiția lui E_n. Deci E_n este finită pentru orice n, în contradicție cu faptul că reuniunea mulțimilor $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ este intervalul I.

Unii concurenți au fost derutați de faptul că, dacă ar exista o funcție f cu proprietatea (e), f ar trebui să fie nemărginită în fiecare punct, fapt care li s-a părut incompatibil cu definiția noțiunii de funcție. Însă funcții nemărginite în fiecare punct există, chiar dacă construcția lor este neobișnuită iar practica matematică are rareori a face cu astfel de funcții. Vom schița în cele ce urmează un asemenea exemplu. Să considerăm o relație r de echivalență în R, definită prin condiția $x\ r\ y$ dacă diferența $x - y$ este rațională. Fiecare clasă de echivalență, fie ea A_α, este o mulțime numărabilă care are intersecție nevidă cu orice interval real. Familia acestor clase de echivalență este de puterea continuului. Există deci o corespondență bijectivă între clasele A_α și numerele reale. Să definim o funcție $f: R \to R$ prin condiția: $f(x) = \alpha_x$ dacă α_x este numărul real asociat, prin bijecția de mai sus, clasei A_α în care se găsește x (reuniunea claselor A_α este evident egală cu R).

Funcția f astfel definită are proprietatea de a lua în orice interval orice valoare reală. O atare proprietate este, probabil, neintuitivă pentru mulți începători în ale matematicii, ea nu aparține nici unei funcții uzuale. Este clar că f este nemărginită pe orice interval, dar în același timp are proprietatea lui Darboux pe orice interval.

După cum vedem, neintuitivul este de multe ori perfect posibil.

ALTE PROBLEME POSIBILE, DE ACEST FEL

După modelul din paragrafele anterioare, pot fi discutate și alte formulări obținute prin perturbarea definiției continuității uniforme.

Fie $f\colon R \to R$. Cînd este satisfăcută una sau alta dintre următoarele proprietăți?

1) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît din $x, y \in R$, $|x - y| < \delta$ să rezulte $f(x) - f(y) < \varepsilon$;

2) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît din $x, y \in R$, $x - y < \delta$ rezultă $f(x) - f(y) < \varepsilon$;

3) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există δ real astfel încît dacă $x, y \in R$ și $x - y < \delta$, atunci $f(x) - f(y) < \varepsilon$;

4) Pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice $\delta > 0$, din $x, y \in R$, $|x - y| < \delta$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

5) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît din $x, y \in R$, $|x - y| < \varepsilon$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \delta$;

6) Există $\varepsilon > 0$ și există $\delta > 0$ astfel încît dacă $x, y \in R$ și $|x - y| < \delta$, atunci $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

7) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît din $x, y \in R$ și $|x - y| > \delta$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

8) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît din $x, y \in R$ și $|x - y| > \varepsilon$ rezultă $|f(x) - f(y)| > \delta$;

9) Pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice $\delta > 0$, din $x, y \in R$ și din $|x - y| < \varepsilon$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

10) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta \geqslant 0$ astfel încît din $x, y \in R$ și $|x - y| \leqslant \delta$ să rezulte $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

11) Pentru orice $\varepsilon \geqslant 0$ există $\delta \geqslant 0$ astfel încît din $x, y \in R$ și $|x - y| \leqslant \delta$ rezultă $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$;

12) Pentru orice ε real există δ real, astfel încît din $x - y < \delta$ rezultă $f(x) - f(y) < \varepsilon$;

13) Pentru orice ε există δ astfel încît din $|x - y| < \varepsilon$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \delta$;

14) Pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice $\delta > 0$, din $|x - y| < \varepsilon$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \eta$.

DE LA CONTINUITATE UNIFORMĂ LA CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ

Un șir (f_n) de funcții care aplică pe R în R, converge pe R dacă șirul numeric $(f_n(x))$ este convergent, oricare ar fi x în R. Să exprimăm această convergență prin condiția cunoscută: Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon(x)$ cu proprietatea că din m, $n > n_\varepsilon(x)$ rezultă $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. După cum se observă și după cum este natural să ne așteptăm, pragul

$n_\varepsilon(x)$ variază în funcție de x, atunci cînd ε este fixat. Uneori se întîmplă însă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, putem alege pragul n_ε independent de x, în așa fel încît să avem totuși $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ de îndată ce $m, n > n_\varepsilon$ și *oricare* ar fi x în R. În acest din urmă caz, se spune că șirul (f_n) *converge uniform* pe R.

Fie acum o funcție $f: R \to R$ presupusă uniform continuă pe R. Să punem $f_n(x) = f(x + 1/n)$. Este ușor de văzut că din continuitatea uniformă a lui f pe R rezultă convergența uniformă a șirului (f_n) pe R. Este adevărată și reciproca? Dacă f este continuă, răspunsul e afirmativ; în general însă răspunsul e negativ, după cum arată funcția lui Dirichlet, definită prin $f(x) = 0$ dacă x este irațional, $f(x) = 1$ dacă x este rațional. Funcția f este discontinuă în orice punct din R, dar avem $f_n(x) = f(x + 1/n) = 0$ dacă x este irațional și $f(x + 1/n) = 1$ dacă x este rațional, oricare ar fi numărul natural n. Deci șirul (f_n) este staționar în fiecare punct iar convergența sa uniformă are loc în mod banal.

*

Mereu noi promoții de absolvenți bat la ușile învățămîntului superior și trăiesc emoția concursului de admitere. Toți vor să învețe din experiența concursurilor similare din anii anteriori. Voi împărtăși în cele ce urmează unele impresii de la admiterea din iulie 1985.

CÎND SE ABUZEAZĂ DE REGULA LUI L'HOSPITAL...

O funcție care i-a păcălit pe mulți este $f: (0, \infty) \to R$ definită prin $f(x) = |\ln x|/\sqrt{x}$. Unii s-au repezit să aplice, în origine, regula lui L'Hospital, fără verificarea atentă a îndeplinirii condițiilor de folosire a acestei reguli. Într-adevăr, limita la dreapta a numărătorului este, în origine, egală cu $+\infty$ iar limita la dreapta a numitorului este, în origine, egală cu zero. Nu era, deci, aplicabilă teorema lui L'Hospital, cel puțin în forma în care ea se află în manualul de Analiză de clasa a XI-a (o anumită generalizare a teoremei lui L'Hospital se poate totuși aplica lui $1/f$; a se vedea teorema IV din Miron Nicolescu, *Analiză matematică*, vol. II, Editura Tehnică, București, 1958, p. 405). Însă o examinare directă a problemei permite să se obțină ușor existența limitei în origine și valoarea ei egală cu infinit (fără a mai fi nevoie să se facă apel la derivatele numărătorului și numitorului).

Faptul că într-un caz atît de simplu mulți candidați n-au văzut soluția, recurgînd la o cale nu numai ocolită dar și nemotivată matematic este simptomatic pentru starea de

spirit a acestor candidaţi. Fără a citi cu atenţie enunţul problemei şi fără a observa suportul ei intuitiv, ei se reped, pe baza unei analogii superficiale, să folosească un instrument inadecvat. Într-adevăr, cum gîndesc aceştia? Expresia funcţiei f se prezintă sub forma unui raport, numărătorul tinde la ∞ iar numitorul tinde la zero; deci: raport, infinit, zero, limită, funcţii derivabile, iată destule elemente comune cu teoremele de tip L'Hospital. Atît a fost destul pentru a se declanşa un adevărat reflex condiţionat, format probabil într-un antrenament orientat mai degrabă spre manipulări de reţete decît spre o gîndire matematică autentică.

Cazul este instructiv şi din alt punct de vedere. Aproape toţi aceşti candidaţi care au abuzat de regula lui L'Hospital au ajuns la un rezultat corect. Dar, încă o dată, trebuie să ne amintim că şi printr-un raţionament fals se poate ajunge la un rezultat corect; raţionamentul nu încetează, prin aceasta, să fie fals şi, deci, să-şi atragă penalizarea de rigoare. În cazul de faţă, aşa cum am observat mai sus, îşi face efectul o teoremă mai generală, în virtutea căreia limita raportului a două funcţii derivabile f şi g revine la limita raportului derivatelor (unde derivata de la numitor nu se anulează) chiar dacă numai una dintre funcţiile f şi g, anume cea de a doua (în modul) tinde la ∞. Dar unii candidaţi au forţat lucrurile şi mai mult, scriind că $(-\ln x)/\sqrt[4]{x}$ tinde la $(-\ln 0)/0_+ = -(-\infty)/0_+ = \infty$. Însă numărul zero nu are logaritm (fie el şi $-\infty$), chiar dacă logaritmul are ca limită la dreapta în origine pe $-\infty$ iar simbolul 0_+ nu a fost niciodată definit. A fost definit simbolul $f(0+)$, care înseamnă limita la dreapta a lui f în origine. De asemenea, raportul $\infty/0$ nu are sens; are însă sens raportul a două funcţii, dintre care prima tinde la infinit iar a doua la zero, limita acestui raport fiind ∞. Nu trebuie uitat nici un moment că ∞ nu este un număr real, ci un simbol care exprimă un anumit comportament la limită.

... ŞI CÎND SE ELUDEAZĂ REGULA LUI L'HOSPITAL

În studiul aceleiaşi funcţii f date de $f(x) = |\ln x|/\sqrt{x}$ mulţi candidaţi au ratat un diagnostic corect al comportamentului în punctul $x = 1$. O mare parte dintre ei nici măcar nu s-au ocupat de acest punct, nesesizînd importanţa sa în comportamentul lui f şi în alura generală a graficului lui f. S-a ignorat un fapt general, care ar putea fi formulat în modul următor: Punctele în care o funcţie f derivabilă

se anulează reclamă o atenție specială în studiul modulului lui f; astfel de puncte candidează cu multe șanse la calitatea de puncte unghiulare, adică puncte în care derivatele la stînga și la dreapta ale lui f există, dar au valori diferite. Prototipul acestor puncte este originea pentru $|x|$.

Însă, în vecinătatea unui zero x_0 al lui $|f|$ expresia lui $f(x)$ se explicitează altfel la dreapta decît la stînga lui x_0. Tocmai un astfel de x_0 este punctul de abscisă 1 pentru funcția f pe care o avem în vedere aici. Derivata la stînga în $x=1$, adică $f'_s(1)$, există dacă există limita la stînga în 1 a expresiei $(f(x)-f(1))/(x-1) = (-\ln x)/\sqrt{x}(x-1)$. Deoarece atît numărătorul cît și numitorul tind la zero, încercăm să aplicăm regula lui L'Hospital. Se observă că sînt îndeplinite condițiile de aplicare a acestei reguli: Numărătorul și numitorul sînt funcții derivabile iar derivata numitorului nu se anulează în vecinătatea lui 1; cele două derivate au ca limită pe -1, respectiv 1, deci limita căutată există și este egală cu -1. Un studiu asemănător privind derivabilitatea la dreapta a lui f în 1 conduce la rezultatul $f'_d(1)=1$, deci punctul $x=1$ este unghiular.

Unii candidați au confundat derivatele unilaterale $f'_s(1)$ și $f'_d(1)$ cu limitele unilaterale, $f'(1-0)$ și $f'(1+0)$, ale derivatei f' în punctul 1, limite care nu implică existența sau valoarea derivatei în chiar acest punct. Este adevărat că, de această dată, avem $f'(1-0)=f'_s(1)$ și $f'(1+0)=f'_d(1)$, datorită faptului că derivata la stînga este continuă la stînga în $x=1$ iar derivata la dreapta este continuă la dreapta în $x=1$. Într-adevăr, avem $f'(x)=(2-\ln x)/2x\sqrt{x}$ pentru $x>1$ și $f'(x)=(\ln x-2)/2x\sqrt{x}$ pentru $x<1$, deci $\lim(f'(x);\ x\uparrow 1)=-1$ și $\lim(f'(x);\ x\downarrow 1)=1$. Din păcate, această argumentare, care legitima substituirea lui $f'_s(1)$ cu $f'(1-0)$ și a lui $f_d(1)$ cu $f'(1+0)$, a lipsit din lucrările respective, pentru a nu mai vorbi de faptul că, chiar dacă argumentarea ar fi fost prezentă, calea aleasă tot inoportună rămînea, deoarece nu aducea nici o simplificare față de calea obișnuită, a evaluării directe a valorilor $f'_s(1)$ și $f'_d(1)$, ci dimpotrivă, o complica.

Tot de o aplicare a regulii lui L'Hospital ar fi fost nevoie și în studiul comportamentului lui $f(x)$ cînd $x\to\infty$. Deoarece $|\ln x|$ și $\sqrt{x}$ tind la ∞ cînd $x\to\infty$, este indicat să se aplice regula lui L'Hospital, observîndu-se că raportul derivatelor este $2/\sqrt{x}$ și are ca limită pe zero cînd $x\to\infty$.

Fiind dată o funcție $f\colon R \to R$, unde $f(x) = \max(\sin x, \lambda + \cos x)$, să se determine valorile parametrului real λ pentru care f este derivabilă în orice punct din R.

Modul cel mai elegant de a trata această problemă constă în utilizarea reprezentării maximului a două numere cu ajutorul sumei și diferenței lor: $\max(a, b) = (a + b + |a - b|)/2$. În cazul nostru, luăm $a = \lambda + \cos x$ și $b = \sin x$, deci $f(x) = g(x) + h(x)$, unde $g(x) = (\lambda + \cos x + \sin x)/2$ iar $h(x) = (|\lambda + \cos x - \sin x|)/2$. Funcția g este, evident, derivabilă în R oricare ar fi valoarea lui λ. Punctele în care h ar putea fi nederivabilă sînt printre cele în care avem $\lambda + \cos x - \sin x = 0$. Ne aflăm în prezența unei ecuații trigonometrice conținînd parametrul λ. Se constată că pentru λ cuprins între $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$ funcția f admite puncte de nederivabilitate, dar pentru λ în afara acestui interval funcția f este derivabilă peste tot în R.

La o situație derutantă conduce și următoarea problemă. Să se arate că

$$2\sqrt{e} \leqslant \int_0^1 e^{x^2}\,dx + \int_0^1 e^{1-x^2}\,dx \leqslant 1 + e.$$

Caracterul derutant constă în faptul că enunțul ne poate orienta pe o pistă falsă, fără speranță, constînd în încercarea de a calcula integralele pe intervalul $[0, 1]$, cu ajutorul formulei lui Leibniz-Newton, deci făcîndu-se apel la funcția primitivă. Desigur, continuitatea funcțiilor aflate sub semnul integralei ne asigură de existența primitivelor lor. Însă, în cazul de față, primitivele nu se pot exprima pe cale elementară, deci trebuie să evităm folosirea formulei lui Leibniz-Newton. Dar chiar dacă ignoram caracterul neelementar al primitivelor aici în discuție, tot nu era cazul să trecem la evaluarea exactă a unor integrale despre care ni se cerea o informație mult mai modestă; aceea privind satisfacerea unor inegalități. Candidații care nu au ținut seamă de acest lucru au intrat în complicații mari, forțînd calculele în mod ridicol, pentru a obține rezultatul. Iată cîteva mostre. Un candidat consideră că suma a două puteri de aceeași bază este egală cu puterea avînd drept exponent suma exponenților puterilor inițiale, deci $e^{x^2} + e^{1-x^2} = e^{x^2+(1-x^2)} = e$. Altul consideră că dacă exponentul este un produs de doi factori, atunci puterea este produsul puterilor avînd drept exponenți pe cei doi factori, deci $e^{x^2} = e^x e^x$. Ca și cum aceasta

n-ar fi fost destul, se inventează în continuare o teoremă, conform căreia integrala unui produs este egală cu produsul integralelor factorilor, deci integrala lui e^{x^2} este egală cu pătratul integralei lui e^x. Fantezia desfășurată de candidați în găsirea unei primitive elementare pentru funcțiile de sub integrală era desigur demnă de o investiție mai bună.

Din fericire, au fost destui candidați care s-au descurcat bine la această problemă. Suma celor două integrale este egală cu integrala sumei funcțiilor de sub integrală, deci trebuie arătat că

$$2\sqrt{e} \leqslant \int_0^1 (e^{x^2} + e^{1-x^2})\, dx \leqslant 1 + e.$$

De la început este clar că nu valoarea integralei se cere ci numai o majorantă și o minorantă a ei. O atare dublă inegalitate evocă imediat teorema de medie pentru integrala Riemann: Fiind dată o funcție f integrabilă pe $[a, b]$ și notînd cu m și M infimumul și, respectiv, supremumul lui f pe $[a, b]$, avem

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b - a).$$

În cazul nostru, avem $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$, deci

$$m \leqslant \int_0^1 (e^{x^2} + e^{1-x^2})\, dx \leqslant M,$$

deci este de bănuit că $m = 2\sqrt{e}$ și $M = 1 + e$. O atare situație conduce la constatarea că $2\sqrt{e}$ este valoarea minimă iar $1 + e$ este valoarea maximă a funcției $f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$ pe $[0, 1]$. Unii au folosit aici teorema conform căreia o funcție continuă pe un interval închis și mărginit este mărginită și își atinge marginile în intervalul respectiv. Apoi au observat că funcția f este derivabilă pe $[0, 1]$, deci punctele ei de extrem se află printre zerourile derivatei. Avem $f'(x) = 2x\, e^{x^2} - 2x\, e^{1-x^2} = 2x(e^{x^2} - e^{1-x^2})$, deci zerourile sînt $x_1 = 0$ și $x_2 = 1/\sqrt{2}$. Constatăm că $f(x_2) = \sqrt{e} + \sqrt{e} = 2\sqrt{e}$ și $f(x_1) = 1 + e$. Însă este clar că $2\sqrt{e} < 1 + e$ (cum se constată prin ridicare la pătrat), deci minimul este atins în x_2 iar maximul în x_1. Însă teorema lui Fermat, folosită aici, are în vedere numai punctele *interioare* de extrem local, deci punctul de abscisă

zero nu este vizat. Clarificarea este adusă de semnul primei derivate, minus la stînga lui $1/\sqrt{2}$ și plus la dreapta lui $1/\sqrt{2}$; deci f își atinge maximul în 0 și minimul în $1/\sqrt{2}$.

PRECAUȚII ÎN STUDIUL CONVERGENȚEI UNUI ȘIR

Fie a și x_0 două numere reale. Șirul (x_n) este definit prin $x_n = 2ax_{n-1}/(x_{n-1} + a)$ oricare ar fi $n \geqslant 1$. Să se studieze convergența șirului (x_n) în cazul în care $a > 0$ și $x_0 > 0$.

Relația dintre a și x_0 este decisivă. Dacă $a = x_0$, atunci $x_1 = 2a^2/2a = a = x_0$ și se constată imediat că șirul (x_n) este staționar, deci în mod banal convergent către a. Foarte puțini candidați au discutat această posibilitate. Celelalte două cazuri, $a < x_0$ și $a > x_0$ comportă discuții separate. În cazul $a < x_0$ se constată prin inducție că șirul este inferior mărginit de a; într-adevăr, admițînd că $x_p > a$ pentru orice $p \leqslant n$, avem $x_{n+1} = 2ax_n/(x_n + a) > 2ax_n/(x_n + x_n) = a$. Foarte puțini candidați au avut grijă de a stabili acest fapt, care sugerează monotonia descrescătoare și convergența către a a șirului (x_n). Într-adevăr, avem $x_{n+1} - x_n = (2ax_n/(x_n + a)) - x_n = (2ax_n - ax_n - x_n^2)/(x_n + a) = (x_n/(x_n + a))(a - x_n)$. Însă $x_n/(x_n + a) > 0$, deoarece fiecare x_n întrece pe $a > 0$ iar $a - x_n < 0$ pentru orice n, așa cum s-a stabilit mai sus; deci $x_{n+1} - x_n < 0$ și șirul (x_n) este descrescător. Să observăm că, deși inegalitatea stabilită depinde de n, nu a fost nevoie de un raționament prin inducție completă. Șirul (x_n), fiind descrescător și mărginit inferior de a, este convergent. Să notăm cu α limita sa. Arătăm că $\alpha = a$. Într-adevăr, din relația $x_n = 2ax_{n-1}(x_{n-1} + a)$ obținem, pentru $n \to \infty$, $\alpha = 2a\alpha/(\alpha + a)$. Soluția $\alpha = 0$ este exclusă, deoarece un șir minorat de numărul strict pozitiv a nu poate tinde la zero. Rămîne soluția $\alpha = a$.

Cazul $x_0 < a$ se tratează în mod asemănător, cu inversarea sensului inegalităților. Șirul (x_n) rezultă monoton crescător, majorat de a și avînd ca limită pe a.

Unii candidați au pornit de la relația de recurență $x_{n+1} = 2ax_n/(a + x_n)$, au notat cu λ limita șirului (x_n) și au obținut, prin trecere la limită, ecuația $\lambda = 2a\lambda/(a + \lambda)$, de unde au dedus $\lambda = 0$ sau $\lambda = a$. Însă de aici rezultă numai că dacă șirul (x_n) este convergent, atunci limita sa este zero sau a; problema este de a arăta că șirul este într-adevăr convergent și că soluția $\lambda = 0$ se exclude.

O altă modalitate de stabilire a convergenței și limitei șirului (x_n) procedează prin inducție completă la exprimarea

relației directe dintre x_n și x_0. Se obține $x_n = 2^n a^n x_0/[(2^n - 1)a^{n-1}x_0 + a] = 2^n a x_0/[(2^n - 1)x_0 + a]$ iar pentru $n \to \infty$ rezultă $\lim x_n = ax_0/x_0 = a$. Această cale este mai directă și mai rapidă, dar conduce la o informație mai săracă, în sensul că nu mai aflăm că șirul (x_n) este monoton și că această monotonie este crescătoare sau descrescătoare, după cum $x_0 < a$ sau $x_0 > a$.

CAPCANELE OPERAȚIEI DE COMPUNERE

La o facultate tehnică s-a propus, la concursul de admitere din iulie 1985, următoarea problemă. Se consideră funcția continuă f: $R \to R$ și funcția $g: R \to R$ dată prin relația $g(x) = \cos f(x)$. Să se arate că funcția g este continuă și că dacă $g(x) = 1$ pentru orice x din R, atunci f este constantă.

Desigur, continuitatea lui g este o consecință a continuității funcțiilor f și cos și a teoremei care afirmă că, prin operația de compunere a două funcții, proprietatea de continuitate se păstrează. Condiția $g(x) \equiv 1$ revine la faptul că $\cos f(x) = 1$ pentru orice $x \in R$. Însă f, ca funcție continuă pe R, are proprietatea lui Darboux, deci mulțimea valorilor lui f este un interval real I. Însă nu există nici un interval — altul decît cel care degenerează într-un punct — a cărui imagine prin funcția cosinus să se reducă la un punct (în cazul de față, cel de abscisă 1). Într-adevăr, după cum se știe din studiul funcțiilor trigonometrice, orice interval nedegenerat admite un subinterval nedegenerat în care cosinusul este o funcție strict monotonă. Rămîne drept unică posibilitate aceea ca intervalul I să se reducă la un punct, adică funcția f să fie constantă; constanta respectivă va fi, obligatoriu, de forma $2k\pi$, unde k este număr întreg, în acest fel avînd $f(x) \equiv 2k\pi$ și $g(x) \equiv \cos f(x) = \cos 2k\pi = 1$.

Soluția poate căpăta și forma unui raționament prin reducere la absurd, care va avea și avantajul de a scoate în evidență în ce fel intervine valoarea unu a lui g. Să presupunem că f nu este constantă, deși $\cos f(x) \equiv 1$. În aceste condiții, există două numere x_1 și x_2, $x_1 \neq x_2$, pentru care $f(x_1) \neq f(x_2)$. Admițînd, pentru a fixa ideile, că $x_1 < x_2$ și $f(x_1) < f(x_2)$ (celelalte cazuri se tratează asemănător) și ținînd seamă de faptul că f, ca funcție continuă, are proprietatea lui Darboux, deci imaginea lui $[x_1, x_2]$ prin f este un interval nedegenerat, care conține intervalul nedege-

nerat $J = [f(x_1), f(x_2)]$, rezultă că imaginea lui J prin funcția *cos* este un interval nedegenerat, în contradicție cu ipoteza $g(x) \equiv \cos f(x) \equiv 1$. În acest fel, presupunerea că f n-ar fi constantă se dovedește falsă.

Mi s-a părut că în alte prezentări ale soluției problemei de față s-a trecut cam repede peste unele puncte delicate, ratîndu-se astfel evidențierea strînsei legături care apare aici între aspectul practic și cel teoretic. Dincolo de ceea ce constituie enunțul propriu-zis al problemei, curiozitatea ne este provocată de întrebări firești de tipul: Cît de esențială este ipoteza continuității lui f? Cît de esențială este alegerea valorii 1? Este reciproca adevărată, cu alte cuvinte, presupunînd că f este constantă, rezultă că g este identic egală cu unu? Să pornim chiar de la această ultimă întrebare. Observăm că răspunsul este negativ. Tot ceea ce putem spune este că g se reduce la o funcție constantă. Însă acest fapt este reflexul unui fenomen mai general, dar banal, conform căruia, dacă una oarecare dintre funcțiile f și g este constantă, atunci funcția obținută prin compunerea $f \circ g$ este de asemenea constantă. Este deci clar că valoarea 1 nu este esențială în enunțul dat. Are loc un enunț mai general: Fie f: $R \to R$ o funcție continuă și g: $R \to R$, $g(x) = \cos f(x)$. Dacă există un număr real a astfel încît $g(x) = a$ pentru orice x real, atunci f este constantă. Să observăm că raționamentul prin reducere la absurd de mai sus rămîne în întregime valabil pentru acest enunț mai general, a cărui reciprocă este de asemenea valabilă, chiar într-o formă mai generală, în care ne putem dispensa de continuitatea lui f iar în loc de *cos* putem lua orice altă funcție.

CÎT DE ESENȚIALĂ ESTE O IPOTEZĂ?

Rămîne acum să ne întrebăm cît de esențială este ipoteza continuității lui f. Observăm că ea a intervenit de două ori în demonstrație: pe de o parte, pentru a asigura continuitatea lui g, pe de altă parte, pentru a asigura validitatea proprietății lui Darboux. Continuitatea lui g era o consecință a teoremei de compunere a funcțiilor continue. *Nu este însă greu să stabilim o teoremă de compunere a funcțiilor cu proprietatea lui Darboux, arătînd că această proprietate se păstrează prin operația de compunere.* Într-adevăr, fie $g(x) = h(f(x))$, unde f și h au proprietatea lui Darboux pe intervalele I, respectiv J. Fie $x_1, x_2 \in I$ și $x_1 < x_2$ astfel încît $g(x_1) \neq g(x_2)$. Fie o valoare k cuprinsă între $g(x_1)$ și

$g(x_2)$, deci între $h(f(x_1)$ și $h(f(x_2)$. Deoarece h are proprietatea lui Darboux pe intervalul care conține pe $f(x_1)$ și pe $f(x_2)$, rezultă că există un număr y_3 cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, astfel încît $h(y_3) = k$. Însă f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I care conține pe x_1 și pe x_2, deci există între x_1 și x_2 un număr x_3 astfel încît $f(x_3) = y_3$. Rezultă că $g(x_3) = h(f(x_3)) = h(y_3) = k$, deci g are proprietatea lui Darboux pe I.

Cele de mai sus conduc la următorul enunț. *Fie* $f: R \to R$ *o funcție cu proprietatea lui Darboux și fie* $g: R \to R$, *cu* $g(x) = \cos f(x)$ *pentru orice* x *din* R. *În aceste condiții, funcția* g *are proprietatea lui Darboux; în plus,* g *este constantă pe* R *dacă și numai dacă* f *este constantă pe* R. Verificarea lui *dacă* este *imediată* iar aceea a lui *numai dacă* se face, în esență, ca și în cazul în care în locul proprietății lui Darboux aveam proprietatea de continuitate.

Explorarea ar putea continua, examinîndu-se proprietățile funcției $g(x) = \cos f(x)$, cînd f are proprietatea lui Darboux; de exemplu, cît de discontinuă poate fi g? De asemenea, se poate examina cu ce alte funcții putem înlocui pe *cos* în enunțurile și raționamentele de mai sus. O posibilitate evidentă: de a înlocui pe *cos* prin *sin*.

Iată cum, pornind de la un exercițiu comun, ne putem pune diferite întrebări interesante privind rolul diferitelor ipoteze și generalitatea unor raționamente. Procedînd în acest fel, ne antrenăm pentru explorări mai dificile și, implicit, pentru activitatea de cercetare științifică.

Dar operația de compunere rezervă multe surprize, datorită faptului că proprietăți importante, cum ar fi proprietatea de integrabilitate sau proprietatea de a fi o derivată finită, nu se păstrează prin compunere. La etapa finală a Olimpiadei de matematică a elevilor (Arad, 1986), s-a cerut concurenților de la clasa a XII-a să stabilească integrabilitatea funcției $g(x) = f(x^2)$, unde f este o funcție integrabilă pe $[0, 1]$. În acest caz particular, integrabilitatea funcției compuse este asigurată, dar în general se poate arăta că orice funcție reală mărginită pe un interval compact rezultă din compunerea a două funcții integrabile.

RADIOGRAFIA GREȘELII

CUM MĂSURĂM GRAVITATEA UNEI ERORI?

Viața socială este guvernată de reguli de funcționare, de imperative morale și de norme juridice. Încălcarea lor este de obicei sancționată, dar natura și gravitatea sancțiunii sînt dintre cele mai variate, în raport cu natura și gravitatea încălcării. În știință, mai cu seamă în științele așa-zise exacte, distincția dintre corectitudine și greșeală este de cele mai multe ori riguroasă. Nu același lucru se poate spune despre posibilitatea de a compara și ierarhiza greșelile matematice după gravitatea lor. Aici rămîne încă loc pentru multă subiectivitate. Acesta este și motivul pentru care la concursurile de matematică se procedează ca și la concursurile de alte specialități, elaborîndu-se în prealabil un barem pe baza căruia se asigură o relativă concordanță între criteriile de apreciere folosite de diferitele cadre didactice angajate în lectura și notarea lucrărilor scrise. Elaborarea baremului comportă mai totdeauna discuții aprinse între cei implicați, iar pe parcursul lecturii lucrărilor baremul este uneori reconsiderat, pentru a-l adapta mai bine la realitatea lucrărilor candidaților. În materie de greșeală, imaginația candidaților este prodigioasă, oferind deseori situații neprevăzute de baremul stabilit inițial. Mulți candidați au o imagine falsă despre corectitudinea tratării unei probleme, fiind convinși că esențială este obținerea rezultatului. Este corectitudinea rezultatului o garanție a corectitudinii tratării problemei? Răspunsul este categoric negativ. Ceea ce interesează în primul rînd este gîndirea care se află la baza tratării. Redactarea trebuie să fie suficient de coerentă și de explicită pentru a-l convinge pe cititor că autorul redactării a gîndit problema în mod autentic și cu o înțelegere globală a ei, în sensul că fiecare parte a tratării este raportată la firul conducător al soluției. Din păcate, multe redactări sînt discontinue, lipsite de motivații și justificări, iar rezultatul așezat la sfîrșit, chiar dacă este corect, rămîne

neconvingător. O lucrare de matematică, întocmai ca orice altă lucrare, este apreciată nu după partea ei finală, ci după modul de ansamblu în care ea se prezintă.

OPERAȚII INCORECTE CU REZULTATE CORECTE

Ce-ați spune dacă în fracția 16/64 un elev ar dori să „simplifice" pe 6 de la numărător cu 6 de la numitor? O enormitate de nota 2, nu? Și totuși, rezultatul acestei ridicole operații de simplificare este corect, deoarece împărțind pe 16 la 64 obținem într-adevăr 1/4. Este prin aceasta atenuată gravitatea greșelii comise? Nicidecum! Nu totdeauna o gîndire greșită se soldează cu un rezultat greșit, cel puțin imediat. Desigur, dacă cel în cauză va repeta greșeala, aplicînd de exemplu același tratament fracției 12/24 și „simplificînd" pe 2 de la numărător cu 2 de la numitor, atunci el va obține rezultatul greșit 1/4. Nu trebuie să ne mire acest lucru. Un comportament greșit nu are totdeauna același rezultat. Un rezultat greșit este simptomatic pentru un tratament greșit, ne avertizează că nu am raționat corect, așa cum durerea este simptomatică pentru starea de boală. Bolile fără dureri sînt periculoase tocmai prin absența semnalului care trebuie să ne atragă atenția asupra necesității de a ne supune examenului medical și tratamentului corespunzător (care poate include și o schimbare de comportament). La fel de periculoasă este și gîndirea vicioasă care nu afectează rezultatul; ea ne poate păcăli cu iluzia corectitudinii.

Dar să revenim asupra simplificării lui 6 în fracția 16/64, pentru a-l obține pe 1/4. Observăm că o simplificare ilicită similară, aplicată fracției 26/65, conduce la rezultatul corect 2/5. O simplificare la fel de ilicită, de astă dată a lui 9, conduce la egalitățiie corecte $19/95 = 1/5$ și $49/98 = 4/8$. Această repetare a unui fenomen care părea să fie produsul unei întîmplări foarte puțin probabile ne dă de bănuit că aici s-ar ascunde un fapt matematic interesant. Să pornim în căutarea lui.

Să nu uităm că în scrierea obișnuită a numerelor se utilizează reprezentarea zecimală, 16 înseamnă $10 \cdot 1 + 6$, iar 64 înseamnă $10 \cdot 6 + 4$. Avem deci $(10 \cdot 1 + 6)/(10 \cdot 6 + 4) = 1/4$. Tot așa $(10 \cdot 2 + 6)/(10 \cdot 6 + 5) = 2/5$, $(10 \cdot 1 + 9)/(10 \cdot 9 + 5) = 1/5$ și $(10 \cdot 4 + 9)/(10 \cdot 9 + 8) = 4/8$. Să încercăm să generalizăm aceste exemple. Se obține următoarea problemă. Pentru care valori întregi pozitive ale lui a, b și c are loc egalitatea $(10a + b)/(10b + c) = a/c$ sau, ceea ce este echivalent, $9ac = b(10a - c)$. O soluție trivială este $a = b = c$. Exemplele de mai sus nu intră însă aici, ci se referă la cazul în care a este diferit de c, iar b este egal cu 6 sau cu 9. Obținem ecuația $(10 \cdot a + 6)/(10 \cdot 6 + c) = a/c$, avînd cele două soluții semnalate mai sus și ecuația $(10 \cdot a + 9)/(10 \cdot 9 + c) = a/c$, avînd celelalte două soluții semnalate mai sus (C. Stanley Ogilvy, John T. Anderson, *Excursions in Number Theory*, Oxford Univ. Press, New York, 1966, p. 86).

Robert A. Carman (*Mathematical Mistakes*. The Mathematics Teacher, vol 64, no. 2, 1971, p. 109—115) propune și alte exemple, mai complicate, de simplificări frauduloase care conduc la rezultate corecte. Astfel, în următoarele fracții, „simplificarea" cifrei mediane a zecilor, aceeași la numărător și la numitor, conduce la un rezultat corect $165/660 = 15/60$, $385/880 = 35/80$, $495/990 = 45/90$, $332/830 = 32/80$, $275/770 = 25/70$. Ar fi interesant de construit problema generală care se ascunde aici și de urmărit modul în care ea ar putea fi soluționată; în această privință se poate folosi modelul tratat la începutul acestui paragraf. Alte exemple: „simplificarea" lui 7, pentru a se obține egalitatea $127/762 = 12/62$; simplificarea lui 5 pentru a ajunge la egalitatea $3\,544/7\,531 = 344/731$.

Dacă cifra zecilor este nulă atît la numărător cît și la numitor, ea se supune următorului comportament: $a0/c0\ d = ab/cd$ dacă $2a = c$, $c \leqslant 8$ și $2b = d$, $d \leqslant 8$. De exemplu $103/206 = 13/26$, $403/806 = 43/86$. A.P. Darmoryad (*Mathematical Games and Pastimes*, Macmillan, New York, 1964, p. 35) observă că simplificarea frauduloasă cu 18 în fracția $143\,185/1\,701\,856$ conduce la rezultatul corect $1435/17056$. Însă R.A. Carman (loc. cit.) opinează că, de îndată ce trecem la numere de ordinul miilor sau mai mari, fenomene ca cele de mai sus sînt tot mai rare. Are oare dreptate? Pînă la clarificarea situației, să contemplăm următorul exemplu în care trei „simplificări" succesive

ale lui 6 (prima pe poziția sutelor, a doua pe poziția zecilor, iar a treia la unități și zeci) conduce la tot atîtea rezultate corecte: $2\,666/6\,665 = 266/665 = 26/65 = 2/5$. Ar fi interesant de discutat problema generală care se ascunde aici.

GREȘELI CELEBRE

De la greșeli ca cele de mai sus, care, în ciuda enormității lor, nu afectează rezultatul, putem trece la altele care, dimpotrivă, invalidează rezultatul, uneori fără speranță de recuperare. Exemplele de acest fel abundă. Pentru toate problemele celebre ale Antichității (cuadratura cercului, duplicarea cubului, trisecțiunea unghiului cu ajutorul riglei și compasului, demonstrearea postulatului paralelelor etc.) s-au propus de-a lungul timpului nenumărate „soluții", în care greșeala era uneori aparentă, alteori foarte ascunsă. Abia în secolul al XIX-lea s-a stabilit statutul lor, bine cunoscut astăzi. Leonhard Euler a propus în 1749 o demonstrație pentru teorema fundamentală a algebrei. Gauss a criticat această demonstrație, invalidînd-o, dar în același timp a folosit o idee ingenioasă a ei, care a constituit baza celei de a doua demonstrații date de Gauss teoremei fundamentale a algebrei. Thomas Stieltjes, autorul integralei care-i poartă numele, a crezut că a demonstrat celebra ipoteză a lui Riemann, conform căreia, cu unele excepții cunoscute, zerourile funcției care se obține ca sumă $S(z)$ a seriei de termen general $1/n^z$ (unde $z = x + iy$ este o variabilă complexă) sînt toate așezate pe dreapta de ecuație $x = 1/2$. Importanța acestei ipoteze este imensă, în primul rînd pentru impactul ei asupra teoriei numerelor prime. Încă Euler arătase că dacă $y = 0$ și $x > 1$, atunci $S(z)$ este egal cu produsul infinit, după toate numerele prime p, din puterea de exponent -1 a binomului $1 - 1/p^z$. Deși ipoteza lui Riemann nu a fost demonstrată nici pînă azi, impactul ideilor lui Stieltjes în această ordine de idei nu poate fi negat. Astfel, Jacques Hadamard se referă la Stieltjes în cercetările sale privind funcția $S(z)$.

O altă greșeală celebră este aceea comisă de Paul Appell în 1926, cînd publică în „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences", Paris, rezultatul care afirmă iraționalitatea constantei lui Euler (egală cu limita, pentru $n \to \infty$, din $1 + 1/2 + \ldots + 1/n - \ln n$). La cîteva săptămîni după publicare, Appell a trebuit să publice o retractare a rezultatului, în ciuda faptului unanim recunoscut că demon-

straţia sa conţine o idee interesantă, care a reţinut atenţia matematicienilor. De la Appell încoace, alţi matematicieni s-au înşelat, la rîndul lor, crezînd că au stabilit iraţionalitatea constantei lui Euler; însă natura acestei constante rămîne în continuare necunoscută.

Lista greşelilor de acest fel este imensă. Poate că n-ar fi exagerat să se spună că istoria matematicii poate fi privită ca o istorie a greşelilor. Într-adevăr, tatonările, bănuielile nu pot evita greşelile, iar ideile valoroase trebuie să plătească tributul unei insuficiente rigori. Drumul spre cristalizarea conceptului de convergenţă uniformă trece prin greşeala lui A. Cauchy, care a crezut că orice şir convergent de funcţii continue pe (a, b) are ca limită o funcţie continuă pe (a, b).

O TEORIE NĂSCUTĂ DIN OBSERVAREA UNEI GREŞELI

Este vorba de teoria mulţimilor analitice, care a luat naştere în 1917, în condiţii puţin obişnuite. Iniţiatorul acestei teorii este un student, Mihail Suslin, din Moscova, care a primit de la profesorul său, N. Luzin, indicaţia de a studia celebrul memoriu al lui Henri Lebesgue (creatorul integralei care-i poartă azi numele), *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1905). În acest memoriu, Suslin a identificat o greşeală. Pentru a o explica, trebuie mai întîi să introducem unele definiţii.

Fie X o mulţime. O familie S nevidă de părţi ale lui X formează un corp dacă operaţiile de reuniune cel mult numărabilă şi de diferenţă, aplicate mulţimilor din S, conduc tot la mulţimi din S. Intersecţia unei familii de corpuri este tot un corp. Fie acum o familie A de părţi ale lui X. Există cel puţin un corp care conţine pe A; acesta este format din toate părţile lui X. Intersecţia tuturor corpurilor care conţin pe A este, prin definiţie, corpul generat de A, notat cu $S(A)$.

Să presupunem acum că X este spaţiul euclidian cu n dimensiuni. Fie A familia tuturor intervalelor deschise n-dimensionale; A nu formează un corp, dar generează corpul $S(A)$, numit corpul mulţimilor boreliene din spaţiul euclidian n-dimensional. Mulţimile din $S(A)$ se numesc mulţimi boreliene. O funcţie reală f se numeşte boreliană dacă mulţimile de forma $\{x; f(x) > a\}$ sînt boreliene pentru orice a real. Să reproducem acum, din memoriul lui Lebesgue, pasajul incriminat de Suslin, unde se caută a se demon-

stra că dacă $x = f(t)$ este o funcție borelian ă și inversabilă, atunci funcția inversă $t = g(x)$ este de asemenea borelian ă: „Datorită ipotezei, se poate arăta că mulțimea punctelor din planul coordonatelor t, x în care $x - f(t) = 0$ este o mulțime borelian ă, E. Deci, oricare ar fi $a > b$, partea B a lui E pentru care $a \leqslant t \leqslant b$ este o mulțime borelian ă. Însă proiecția, pe axa absciselor, a unui interval bidimensional este un interval unidimensional, proiecția unei reuniuni de mulțimi este reuniunea proiecțiilor acestor mulțimi, iar proiecția intersecției unui șir descrescător de mulțimi este egală cu intersecția proiecțiilor mulțimilor din șir. Ținînd seamă că mulțimile boreliene coincid cu mulțimile care se obțin pornind de la intervale, prin aplicarea repetată a operațiilor de reuniune numărabilă și intersecție de șiruri descrescătoare, rezultă că proiecția mulțimii B pe axa $t = 0$ este o mulțime borelian ă. Prin aceasta s-a demonstrat că funcția $t = g(x)$ este borelian ă".

RADIOGRAFIA GREȘELII LUI LEBESGUE

Greșeala identificată de Suslin în pasajul de mai sus este următoarea: Afirmația că proiecția intersecției unui șir descrescător de mulțimi este egală cu intersecția proiecțiilor acestor mulțimi este falsă. Într-adevăr, fie E_n mulțimea tuturor punctelor din plan ale căror coordonate x, y satisfac condițiile $x = 0$, $0 < y < 1/n$. Este vizibil că nu există nici un punct comun tuturor mulțimilor $E_n (n = 1, 2, \ldots)$, deci proiecția pe axa absciselor a intersecției mulțimilor E_n (pentru $1 \leqslant n < \infty$) este mulțimea vidă. Pe de altă parte, oricare ar fi n întreg pozitiv, proiecția pe axa absciselor a mulțimii E_n este nevidă, fiind formată dintr-un punct: originea. Deci intersecția proiecțiilor mulțimilor $E_n (n = 1, 2, \quad)$ pe axa absciselor este nevidă.

Pentru Lebesgue, această greșeală era explicabilă din punct de vedere psihologic, ea fiind legată de o chestiune marginală față de scopul principal al memoriului său. Greșeala este cu totul locală, neatingînd cu nimic valoarea de ansamblu a lucrării. Intuiția lui Lebesgue a fost, de altfel, justă; teorema lui Lebesgue, chiar dacă lacunară în demonstrație, s-a dovedit a fi adevărată. Însă demonstrația corectă a acestei teoreme, dată ulterior de N. Luzin, se sprijină pe teoria mulțimilor analitice, teorie născută tocmai din radiografia greșelii lui Lebesgue. Să explicăm despre ce este vorba.

Suslin, analizînd scăparea lui Lebesgue, a descoperit că o operație atît de simplă cum este proiecția, aplicată unei mulțimi boreliene, poate să conducă la o mulțime neboreliană. De exemplu, proiecția unei intersecții numărabile de mulțimi deschise (o mulțime din plan este deschisă dacă împreună cu orice punct al mulțimii este inclus în mulțime un întreg disc centrat în punctul respectiv) este uneori o mulțime liniară neboreliană. Mulțimile analitice liniare sînt, prin definiție, acele mulțimi liniare care se obțin ca proiecții ale mulțimilor boreliene din plan. Evident, orice mulțime boreliană este analitică; reciproca însă nu este adevărată.

Din păcate, Suslin a murit foarte tînăr (în 1918). Profesorul său, Luzin, este cel care a construit întreaga teorie a mulțimilor analitice, inițiată de Suslin. Luzin, în modestia sa, merge pînă acolo încît atribuie lui Lebesgue meritul de a fi descoperit mulțimile analitice, deoarece construcția acestor mulțimi este implicit conținută în memoriul lui Lebesgue. Dar Lebesgue „se apără" de această descoperire, despre care mărturisește că nu a avut nici cea mai vagă idee, subliniind în același timp valoarea și frumusețea incontestabilă a acestei teorii. Pentru detalii, se poate consulta capitolul al V-lea al lucrării noastre *Noțiuni de Analiză Matematică*, Editura Științifică, București, 1967.

O LUCRARE ROMÂNEASCĂ DESPRE EROAREA MATEMATICĂ

Avem în vedere cartea lui Alexandru Froda (*Eroare și paradox în matematică*, Editura Enciclopedică Română, București, 1971), care aduce în fața cititorilor o experiență foarte bogată și interesantă, cu observații de o deosebită finețe. Al. Froda a reușit, încă în 1927, să identifice o eroare într-o carte a celebrului matematician francez Emile Borel (*Leçons sur les fonctions mèromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1909), eroare recunoscută ulterior de acesta din urmă (a se vedea, la p. 39—43 din cartea lui Froda, analiza erorii lui Borel). Tot Al. Froda a descoperit o eroare în tratatul clasic al lui Charles de Comberousse (*Algèbre supérieure*, vol. 3, livre 1, chap. II, Gauthier-Villars, Paris, 1904, p. 16). Caracterul relativ elementar al chestiunii ne permite reproducerea aici. Enunțul incriminat din cartea lui Comberousse este următorul: Un polinom $P(x)$ este identic nul dacă și numai dacă toți coeficienții săi sînt nuli. Iată demonstrația lui Comberousse: Fie $P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m$ — un polinom de gradul m care se anulează

pentru mai mult de m valori ale lui x și care este, prin urmare, identic nul. Acest polinom, fiind nul pentru orice x, este nul pentru $x = 0$, deci $A_0 = 0$. Polinomul se poate deci scrie (1) $P(x) = x(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots + A_mx^{m-1})$. Deoarece $P(x)$ este nul oricare ar fi x, paranteza din membrul al doilea al egalității (1) satisface *aceleași condiții*. Avem deci, presupunînd că $x = 0$, rezultatul $A_1 = 0$. În același fel se arată că $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $\ldots$, $A_m = 0$.

Aici s-a încheiat demonstrația lui Comberousse. Al. Froda atrage atenția că greșeala de raționament se introduce prin cuvintele subliniate în text. Într-adevăr, afirmația respectivă este falsă, ea verificîndu-se numai sub condiția $x \neq 0$. Rezultă că polinomul $P_1(x) = A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots + A_mx^{m-1}$, polinom care apare în paranteza din membrul al doilea al egalității (1), ia valoarea zero oricare ar fi x diferit de zero, deci nu reproduce condițiile inițiale cărora le-a fost supus polinomul $P(x)$. În continuare, Al. Froda dă o demonstrație corectă (bazată pe noțiunea de funcție continuă) a enunțului la care se referă Comberousse, enunț bine cunoscut azi oricărui elev din clasele superioare.

Un alt exemplu semnalat de Froda se referă la teorema lui G. Cantor și F. Bernstein: Fie A și B două mulțimi infinite pentru care există o parte A_1 a lui A și o parte B_1 a lui B astfel încît A este în corespondență bijectivă cu B_1, iar B se află în corespondență bijectivă cu A_1. În aceste condiții, există o bijecție între A și B. Matematicianul american Ky Fan a pretins că are loc următoarea generalizare a teoremei lui Cantor și Bernstein. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un număr finit ($n > 2$) de mulțimi infinite ordonate ciclic, astfel încît $A_{n+1} = A_1$. Să admitem că, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$, există o bijecție t_i între A_i și o parte a lui A_{i+1}. În aceste condiții, fiecare A_i se partiționează în două mulțimi B_i și C_i, astfel încît t_i transformă bijectiv pe B_i în C_{i+1} ($t_i(B_i) = C_{i+1}$), în timp ce $C_{n+1} = C_1$.

Însă Al. Froda a sesizat că raționamentul lui Ky Fan nu este corect pentru valorile impare ale lui n, rămînînd corect pentru orice valoare pară a lui n (p. 47—49 ale cărții sale). O tratare a problemei valabilă independent de paritatea lui n apare abia la B.L.Sanders (în „Mathematische Zeitscrift", vol. 76, 1961, p. 51—55).

Cît de des greșesc matematicienii? Unii sînt de părere că greșeala apare la tot pasul. Unul dintre cei mai importanți specialiști în teoria probabilităților, J.L. Doob, a pretins că, dacă deschizi la întîmplare o lucrare de matematică, este foarte probabil să existe acolo cel puțin o greșeală. Desigur, intră aici greșeli de toate calibrele, cele mai numeroase fiind probabil inadvertențe locale, lipsite de gravitate și fără consecințe serioase asupra ansamblului lucrării. Totuși, pe măsură ce matematica s-a complicat și lungimea medie a demonstrațiilor a crescut, probabilitatea greșelii a crescut și ea, devenind tot mai important controlul demonstrațiilor matematice.

Greșesc matematicienii mai mult decît alți specialiști? Este matematica marcată de spectrul erorii, mai mult decît fizica, chimia, biologia sau geologia? Probabil că nu. Am fi chiar tentați să credem că, datorită scrupulului lor deosebit pentru rigoare, matematicienii greșesc mai puțin decît colegii lor din alte domenii de cercetare. Însă în matematică, mai mult decît în alte domenii, granița dintre corectitudine și greșeală este, de cele mai multe ori, precisă, indiscutabilă. Aceasta nu înseamnă că greșelile sînt foarte vizibile. Modul în care se poate ascunde greșeala în matematică a fost ilustrat anterior prin exemple dintre cele mai variate. Așa cum observam mai sus, complexitatea crescîndă a demonstrațiilor matematice mărește probabilitatea greșelii. Apar azi demonstrații uriașe ca lungime și complexitate. După evaluări aproximative, teorema (recentă) de clasificare a grupurilor finite simple a cerut zeci de ani de eforturi ale unei întregi armate de matematicieni, 4 500 de pagini de teorie matematică și, în plus, cîteva mii de ore de calculator. Teorema celor patru culori, demonstrată în 1976, a cerut și ea un efort teoretic și computațional considerabil (chiar dacă net inferior celui reclamat de teorema de clasificare a grupurilor simple finite). Demonstrarea unui rezultat apropiat de conjectura lui Goldbach ocupă o carte întreagă și se prevalează de mai tot ce este important în teoria numerelor. Amintim că ipoteza lui Goldbach afirmă că orice număr par superior lui 2 este suma a două numere prime. Rezultatul demonstrat afirmă că orice număr par superior lui 2 este suma dintre un număr prim și produsul a cel mult două numere prime. Conjectura lui Bieberbach, demonstrată în urmă cu vreo doi ani, afirmă că dacă funcția de variabilă complexă $f(z)$ este suma, în cercul cu centrul în

origine și de rază egală cu unitatea, a unei serii convergente. de forma unui „polinom de grad infinit" fără termen liber și avînd drept coeficient al lui z pe 1, iar f este o aplicație injectivă în cercul unitate, atunci coeficientul puterii de exponent n a lui z nu poate întrece valoarea n (oricare ar fi numărul natural n).

DEVINE MATEMATICA O ȘTIINȚĂ EXPERIMENTALĂ?

Demonstrația inițială a conjecturii lui Bieberbach conținea multe greșeli, dar nici una nu s-a dovedit a fi esențială. De altfel, în procesul de testare a demonstrației s-au obținut simplificări considerabile și au fost eliminate multe erori. Este însă semnificativ faptul că aceasta s-a realizat nu prin efortul exclusiv al autorului demonstrației, ci prin eforturile conjugate ale mai multor matematicieni, din diverse țări (U.S.A., U.R.S.S., și R.F.G). S-a dovedit astfel încă o dată importanța cooperării internaționale în dezvoltarea științei.

O situație mai complicată s-a ivit în legătură cu demonstrația teoremei celor patru culori (enunțul aproximativ al acestei teoreme este: Patru culori sînt necesare și suficiente pentru a colora orice hartă, reală sau imaginară, în așa fel încît două „țări" vecine să nu primească niciodată aceeași culoare). Era pentru prima oară cînd, în demonstrația unei teoreme, se folosea calculatorul electronic. Unul dintre autorii demonstrației, Wolfgang Haken, fiind întrebat dacă apreciază că demonstrația teoremei celor patru culori este o demonstrație ca toate celelalte, a dat următorul răspuns: Dacă privim o demonstrație ca un lanț finit de deducții logice formale, atunci demonstrația teoremei celor patru culori nu prezintă nimic deosebit. Dacă însă cerem în plus ca o demonstrație să poată fi supravegheată, controlată și verificată în toate detaliile de către un matematician individual, fără nici un fel de ajutor fizic (de exemplu, prin folosirea unui calculator) și aceasta într-un timp rezonabil, în orice caz finit, atunci demonstrația în discuție nu mai este de tipul celor obișnuite.

Considerațiile de mai sus atrag atenția asupra unei situații noi apărute în matematică și care, probabil, va lua o amploare tot mai mare în deceniile următoare. Începînd cu dezvoltarea geometriilor neeuclidiene, devenise tot mai clar că sistemele de axiome cu care se lucrează în matematică nu sînt numai rezultatul unui exercițiu logic și combinator, ci manifestă și o relativă dependență de proprie-

tăţile fizice ale entităţilor pe care le avem în vedere. În particular, geometria depinde, în bună măsură, de fizică; axiomele ei au şi o latură experimentală. Acum, prin teorema celor patru culori şi prin teorema de clasificare a grupurilor simple finite, însuşi procesul demonstrativ, pe care-l credeam de neatins în puritatea sa logică, intră într-o dependenţă tot mai accentuată de fizică, de experiment. Acest caracter experimental al matematicii se manifestă în forme tot mai variate. Modelarea matematică a sistemelor este acum tot mai frecvent secondată de diferite tehnici de simulare a comportamentului sistemic, activitate de natură pronunţat experimentală. Unele ipoteze şi conjecturi sînt testate, pentru cazuri particulare, cu ajutorul calculatorului electronic, în vederea obţinerii unor informaţii de plauzibilitate a diferitelor răspunsuri posibile. A apărut, nu de mult, chiar o carte cu titlul *Experiments in Mathematics* (de Ulf Grenander) dedicată acestei chestiuni. Numeroase conjecturi din domeniul teoriei numerelor sînt supuse actualmente unor testări de acest fel. Dar folosirea calculatorului în chiar procesul demonstrativ al unei teoreme constituie o etapă superioară, în orientarea spre fizic şi experiment a activităţii matematice. Numai că, în acest fel, controlul corectitudinii demonstraţiei devine mai dificil, uneori poate chiar imposibil. O teoremă generală din informatica teoretică afirmă că un program de calculator nu poate fi totdeauna controlat cu ajutorul unui program de calculator; mai general, gîndirea algoritmică nu poate fi totdeauna controlată tot pe cale algoritmică.

PARIUL LUI J. L. DOOB

Schema generală a strategiei folosite în demonstrarea teoremei celor patru culori şi a altora de acest fel este următoarea: (a) Se arată că teorema este adevărată de îndată ce o anumită proprietate P este verificată într-un număr finit de cazuri speciale; (b) Se inventariază în mod explicit cazurile speciale care trebuie testate; (c) Se trece la testarea proprietăţii P în fiecare caz special în parte. Se observă că nu este vorba de demonstraţii bazate *exclusiv* pe calculator, ci de o strategie mixtă, în care primele două etape (a) şi (b) angajează puterile minţii umane, iar etapa a treia, (c), recurge la folosirea colaborării dintre om şi calculator. Etapa (a) constă în a reduce problema de la un număr infinit la un număr finit de parametri. În cazul teore-

mei celor patru culori, această etapă a parcurs mari dificultăți, necesitînd un efort de peste un secol al unor matematicieni aparținînd cîtorva generații. Demonstrația din 1976 valorifică, într-adevăr, numeroase idei și rezultate ale unor predecesori care, dacă au eșuat în demonstrarea completă a teoremei celor patru culori, au pus totuși cărămizi prețioase la edificiul acestei demonstrații. În ceea ce privește cazurile speciale care trebuiau testate, ele erau, pentru teorema în discuție, în număr de vreo 1 500. Este lesne de înțeles că migala și complexitatea unor atare operații depășeau posibilitățile unei abordări manuale.

Demonstrația din 1976 a teoremei celor patru culori ocupa 136 de pagini tipărite. Unele simplificări datorate fie autorilor inițiali, fie unor contribuții ale altor matematicieni, au reușit să reducă numărul orelor de calculator necesare în etapa (c). Era clar de la început că programele de calculator depindeau esențial de calitatea limbajului de programare folosit. Desigur, se poate admite, în principiu, că simplificări ulterioare ale demonstrației ar putea face inutilă folosirea calculatorului. Deocamdată însă nu am ajuns în acest stadiu, iar acest fapt face dificilă verificarea demonstrației. În 1982, o lucrare de diplomă a fost consacrată exclusiv acestei verificări (U. Schmidt, *Überprufung des Beweises für den vierfarben Satz.* Diplomarbeit, Technische Hochschulle, Aachen), prilej cu care au fost identificate unele erori în demonstrație; s-a răspîndit atunci zvonul că demonstrația teoremei celor patru culori nu este bună, că nu poate fi acceptată. J.L. Doob îi provocase pe Appel, Haken și Koch, autorii demonstrației din 1976, pretinzînd că după cel mult cinci luni de investigații va găsi neîndoielnic o greșeală în demonstrație. Appel, Haken și Koch au răspuns că acceptă pariul, cu condiția de a li se rezerva o perioadă de două săptămîni începînd cu data semnalării greșelii, perioadă în care ei, în mod cert, vor putea înlătura greșeala și repara demonstrația. J.L. Doob a acceptat, dar pariul a fost cîștigat de Appel, Haken și Koch. Ulterior, Haken a publicat un articol cu titlul semnificativ: „Demonstrația teoremei celor patru culori este bună", în care explică detaliat și convingător ideea de ansamblu a demonstrației și motivul pentru care eventuale noi greșeli sau lacune care ar mai putea fi descoperite nu pot contamina ansamblul procedării.

Discuția de mai sus ne atrage atenția asupra statutului foarte eterogen, variabil și nuanțat al greșelii în matematică și, în general, în cunoașterea umană. Există o infinitate de grade de gravitate ale greșelii. Din punct de vedere psihologic, greșelile sînt inevitabile. Multe dintre ele îndeplinesc o adevărată funcție terapeutică. Unele greșeli se află la baza unor mari descoperiri (a se vedea greșeala lui Lebesgue din care s-a născut teoria mulțimilor analitice a lui Suslin și Luzin), altele au generat mari eșecuri (a se vedea șirul de matematicieni care au crezut a fi rezolvat unele probleme celebre, de la natura constantei lui Euler pînă la ipoteza lui Riemann). În practica matematică obișnuită, greșeala se poate ivi în împrejurări dintre cele mai diverse: folosirea unei teoreme fără îndeplinirea tuturor condițiilor care permit aplicarea ei; omiterea unui caz dintre mai multe cazuri posibile într-o anumită situație; încălcarea unei reguli logice de inferență; efectuarea necorectă a unor calcule; folosirea într-o formă necorectă a unui rezultat anterior etc.

Există mijloace de a evita greșeala? De a o evita cu desăvîrșire este cam greu, dar putem reduce frecvența ei prin luarea unor măsuri de precauție. După ce redactăm un text, trebuie să-l revedem cu atenție. P.R. Halmos preconiza că după redactarea paginii a n-a să revedem primele n pagini. În acest fel, într-un text de zece pagini, prima este revăzută de 10 ori, a doua de 9 ori, a treia de 8 ori și așa mai departe, a opta de 3 ori, a noua de 2 ori, iar pagina a zecea este revăzută o singură dată. Ideea care ni se sugerează aici este aceea că, pe măsură ce înaintăm cu redactarea, paginile deja redactate ne pot apărea într-o lumină nouă. Se creează însă o asimetrie, o neconcordanță între controlul repetat al primelor pagini și controlul superficial al celor din urmă. Această neconcordanță poate fi atenuată prin lectura repetată a textului în forma sa integrală. Dar nu este suficientă recitirea repetată a textului; mai este nevoie și de un control riguros al surselor folosite. Folosirea unei teoreme pe baza modului în care ne-o amintim este riscantă; prudența reclamă verificarea la sursă a folosirii corecte a teoremei respective (desigur, aceasta nu este posibil la un examen sau concurs la care consultarea diferitelor surse nu este permisă). Calculele trebuie și ele verificate etapă cu etapă; dacă amînăm verificarea pînă la încheierea tuturor calculelor, s-ar putea să intrăm în criză de timp, în eventualitatea necesității refacerii lor (desigur, această chestiune

privește cu deosebire situația în care, așa cum se întîmplă la un examen, avem la dispoziție o durată precisă, destul de limitată, pentru rezolvarea unor probleme). Există apoi o anumită terapeutică a redactării unui text matematic. Graba este o sursă potențială de greșeli. Apoi, matematica pretinde un antrenament îndelungat, în ceea ce privește capacitatea de concentrare a atenției, pe o durată mai mare, asupra unei dezvoltări de raționamente și calcule în care fiecare etapă depinde esențial de etapele anterioare. Un insuficient antrenament de acest tip se află la originea multor greșeli comise de începători. Nu trebuie neglijate nici aparente amănunte, cum ar fi caligrafia redactării. Dacă grafia nu distinge bine între *o* și *a*, între cifra 1 și litera *l*, între *u* și *n*, există posibilitatea substituirii pe parcurs a unor simboluri prin altele. Să mai observăm că nu de puține ori, la examene de matematică, enunțul propus candidaților este interpretat greșit, datorită unei lecturi insuficient de atente sau/și datorită unei cunoașteri superficiale a materiei; de aici, o orientare a răspunsului într-o direcție diferită de aceea avută în vedere de cei care au propus enunțul respectiv. Uneori se întîmplă ca, din neglijență, enunțul să prezinte totuși o anumită ambiguitate, datorită unei formulări nefericite. În acest caz, candidatul, dacă nu poate cere lămuriri, va specifica diferitele interpretări ale enunțului și va preciza interpretarea pe care o adoptă (în cazul în care nu este posibil să se ocupe de fiecare dintre aceste interpretări).

DOUĂ ZONE DE MANIFESTARE A GREȘELII

Distingem deci două zone distincte de manifestare a greșelii. Prima zonă privește activitatea de cercetare; aici, fiind vorba de explorarea necunoscutului, este firesc să ne aflăm mereu sub amenințarea erorii. N-au fost cruțați de eroare nici cei mai mari matematicieni. Aceasta nu înseamnă, firește, că eroarea n-are importanță, că nu trebuie luptat împotriva ei; dar experiența a arătat că nu eroarea este păcatul cel mai mare pe care-l poate comite un om de știință, ci lipsa de idei sau pur și simplu de sens. Decît o lucrare corectă, dar anodină, fără idei noi, interesante, mai bine o lucrare cu greșeli, dar care conține măcar unele sugestii interesante. A doua zonă de manifestare a greșelii este aceea a proceselor de învățare. Cunoștințele deja acumulate sînt sistematizate în cursuri, manuale, monografii și tratate,

unde probabilitatea erorii este evident mai mică decît în articole proaspete din revistele de cercetare. Să nu uităm însă că cei care învață după cursuri și manuale sînt, în mare parte, începători mult mai supuși erorii decît cei avansați și profesionalizați. Chiar dacă în cursuri și manuale greșelile sînt relativ puține, greșelile și confuziile care apar în procesul de învățare a cursurilor și manualelor sînt numeroase. Am putea chiar spune că dacă un începător nu comite greșeli și nu manifestă nedumeriri în învățarea unei discipline dificile, cum ar fi, de exemplu, Analiza matematică, atunci există o probabilitate mare ca apropierea sa de această materie delicată să fie foarte superficială.

Să observăm, totuși, că dacă un cercetător profesionist este capabil, de multe ori, să identifice singur greșelile pe care le-a comis și, eventual, să le corecteze, un începător este mai rar capabil de acest autocontrol; pentru acesta din urmă, dialogul cu o persoană mai bine pregătită capătă o importanță deosebită și poate accelera substanțial procesul de înțelegere. Poate că unul dintre cele mai utile exerciții propuse unui începător este de tipul: Unde este greșeala? Un începător poate beneficia în două feluri de acest tip de exercițiu: fie controlînd corectitudinea unor texte ale colegilor săi și dezvoltîndu-și în acest fel spiritul critic; fie fiind controlat de colegi ai săi, de la care poate primi observații critice. Dar, firește, acest lucru nu este suficient; mai este nevoie și de controlul efectuat de profesor, deoarece unele greșeli mai subtile vor rămîne probabil neobservate. Dar nici cercetătorii formați nu-și pot detecta singuri toate inadvertențele; revistele științifice dau la referat unor specialiști articolele primite pentru publicare (de regulă, tot de la specialiști) și rar se întîmplă ca textul să nu fie trimis autorului pentru revizuiri. Există probabil o lege psihologică generală, conform căreia nici o persoană nu se poate obiectiva suficient pentru a-și putea examina critic propriile sale texte; este totdeauna nevoie de acel „cap limpede" care, citind textul cu un ochi proaspăt, vede și ceea ce autorului i-a scăpat.

Exercițiile de tipul *Unde este greșeala?* prezintă totuși un inconvenient important. Interlocutorul este avertizat asupra prezenței unei greșeli, deci atenția sa e mobilizată în acest sens. Însă într-un proces normal de învățare și/sau cercetare, vigilența față de eventuale erori trebuie să funcționeze tot timpul, deci și în absența unui avertisment. Este de aceea important ca interlocutorul să fie prevenit că printre textele care i se propun pentru inspecție

se pot afla şi unele în care nu există nici o eroare. Experienţa mi-a arătat că, în astfel de situaţii, fenomenul cel mai caracteristic este identificarea unor erori imaginare, a unor false erori; începătorii devin, în condiţiile unui atare experiment, foarte bănuitori, ei nu mai au încredere aproape în nici una din cunoştinţele lor anterioare. Este ca şi cum, supuşi unui proces de intimidare, ei sînt gata să retracteze aproape tot ceea ce au învăţat. Faptul este deosebit de semnificativ pentru ceea ce poate însemna o însuşire superficială a materiei.

GREŞELI DE TIPAR BENIGNE

Şi acum, pentru a ne descreţi puţin frunţile, să relatăm unele greşeli de tipar care au devenit celebre datorită corectitudinii involuntare prin care ele se finalizează. Cea mai cunoscută este aceea semnalată de H.E. Dudeny (*Amusements in Mathematics*, Thomas Nelson & Sons, New York, 1917, p. 20): Produsul dintre 2 la puterea 5 şi 9 la puterea 2 este 2592, cu alte cuvinte prezenţa lui 5 şi a lui 2 la exponent a fost confundată cu prezenţa lor „la parter", dar această confuzie nu s-a soldat (din fericire?) cu un rezultat greşit, deoarece un mic calcul arată că produsul celor două puteri este într-adevăr 2592. Această situaţie a generat, în mod natural, următoarea problemă: Care sînt soluţiile ecuaţiei (x la puterea y) (z la puterea x) = $xyzx$? În „American Mathematical Monthly" vol. 41 1934, p. 332, s-a arătat că *unica* soluţie a acestei ecuaţii este cea semnalată mai sus ($x = 2$, $y = 5$, $z = 9$).

Numeroase alte „greşeli de tipar" de acest fel ilustrează fenomene similare, în care îşi fac efectul unele teoreme ascunse, care ne provoacă să le descoperim. De exemplu: Produsul dintre 3 la puterea 4 şi 425 este egal cu ... 34 425; produsul dintre 3 la puterea 4 şi 4 250 este egal cu... 344 250; produsul dintre 31 la puterea 2 şi 325 este tocmai... 312 325; produsul dintre 31 la puterea 2 şi 3 250 este egal cu... 3 123 250; produsul numerelor 73, 9 şi 42 este egal cu produsul dintre 7 şi 3 942 iar cel dintre 73, 9 şi 420 este egal cu produsul dintre 7 şi 39 420. Observăm că în primele patru egalităţi lucrurile s-au petrecut ca şi cum cifra care figura ca exponent era coborîtă la „parter", iar în ultimele două egalităţi ordinea cifrelor era păstrată, dar poziţia unor operaţii de multiplicare era modificată. Dar, de fiecare dată, această alterare a expresiei iniţiale rămînea fără efect asupra

rezultatului. Iată şi alte exemple de acest fel: Diferenţa dintre 9 la puterea a 2-a şi 1 la puterea a 2-a este egală cu $92 - 12 = 80$, tot aşa cum diferenţa dintre 8 la puterea a 2-a şi 2 la puterea a 2-a este egală cu $82 - 22$. În general, diferenţa dintre pătratul lui a şi cel al lui b, pentru $a + b = 10$ şi a superior lui b, este egală cu $a2 - b2$ (în cazurile de mai sus am avut $a = 9$ şi $b = 1$, în primul exemplu, şi $a = 8$ şi $b = 2$ în al doilea exemplu).

Frecvente sînt situaţiile în care tipografii plasează greşit semnul de extragere a rădăcinii pătrate sau al unui radical de ordin superior. Dar nu totdeauna se simt efectele unei greşeli de acest fel; ca în cele ce urmează: Rădăcina pătrată aritmetică din 2 şi 2/3 este egală cu produsul dintre 2 şi rădăcina pătrată a lui 2/3; Rădăcina pătrată din 3 şi 3/8 este egală cu produsul dintre 3 şi rădăcina pătrată a lui 3/8. Mai general, rădăcina de ordinul n din suma $a + a/(a^n - 1)$ este egală cu produsul dintre a şi rădăcina de ordinul n din $a/(a^n - 1)$ pentru orice a superior lui 1.

Alte „greşeli de tipar" se referă la omiterea, din fericire fără consecinţe, a simbolului factorial. Astfel, avem $1! = 1$, $2! = 2$, $1! + 4! + 5! = 145$ şi $4! + 0! + 5! + 8! + 5! = 40\,585$. În sfîrşit, să mai menţionăm unele înmulţiri în care anumite permutări ale cifrelor rămîn fără consecinţe asupra rezultatului înmulţirii: $102 \times 402 = 201 \times 204$, $213 \times 936 = 312 \times 639$, $213 \times 624 = 312 \times 426$, $12 \times 42 = 21 \times 24$, $13 \times 62 = 31 \times 26$. În alte cazuri, rezultatul înmulţirii a două numere este format chiar cu cifrele celor două numere, într-o ordine adecvată: $21 \times 87 = 1\,827$, $27 \times 81 = 2\,187$, $35 \times 41 = 1\,435$, $86 \times 251 = 21\,586$.

Egalităţi interesante apar în folosirea unor numere mixte. Astfel, în egalitatea $11^2 \cdot (9 + 1/3) = 1\,129 + 1/3$; totul se petrece ca şi cum coborîrea lui 2 de la exponent la „parter" şi suprimarea parantezelor rămîn fără influenţă asupra rezultatului. Situaţii similare apar în următoarele egalităţi: $11^2(93 + 1/3) = 11\,293 + 1/3$, $11^2(933 + 1/3) = 112\,933 + 1/3$, $21^2(4 + 9/11) = 2\,124 + 9/11$, $13^2(7 + 6/7) = 1327 + 6/7$, $13^2(7\,857\,142 + 6/7) = 1\,327\,857\,142 + 6/7$.

Alte exemple de „greşeli de tipar" benigne sînt indicate de Dudeny *(Amusements in Mathematics*, Scripta Mathematica, vol. 8, 1942, p. 78*)* şi Joseph Madachy *(Math. on Vacation*, Charles Scribner's Sons, New York, 1967*)*.

În toate exemplele de mai sus, caracterul benign al unor greşeli de tipar este rezultatul funcţionării unor teoreme care în unele cazuri au fost puse în evidenţă, în altele au fost lăsate în seama cititorilor.

GÎNDIREA CONSTRUCTIVISTĂ

PROVOCAREA LUI BISHOP

În 1973, cu zece ani înainte de a muri, Errett Bishop, autorul unei importante concepții constructiviste despre matematică (a se vedea cartea sa *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw Hill, New York, 1967) a lansat un adevărat manifest de avertizare asupra unor primejdii grave care pîndesc dezvoltarea matematicii. Titlul însuși al acestui manifest, o conferință ținută în cadrul Societății Americane de Matematică, este semnificativ: *Schizofrenia din matematica contemporană.*

Bishop identifică în matematica actuală un sindrom de natură schizofrenică, ale cărui atribute principale sînt următoarele: respingerea sensului comun în favoarea formalismului; degradarea înțelesului, prin refuzul încăpățînat de conformare cu unele aspecte ale realității; inadecvarea mijloacelor față de scopuri; natura ezoterică a comunicării; fragmentare.

Sensul comun este mereu sacrificat, fiind înlocuit prin metodologie și chiar dogmă, crede Bishop. Cele mai multe argumentări, în matematica modernă, revin la aplicarea succesivă a cîtorva scheme de bază. Panorama matematică revine la producerea, compararea și investigarea unor sisteme formale, iar demonstrațiile sînt gîndite ca manipulări de secvențe de simboluri. Unicul scop este evitarea contradicției. Înțelesul este neglijat.

Dar degradarea înțelesului, a semnificației are și o altă sursă, pe care Bishop o identifică în refuzul de a se examina conținutul unor expresii frecvente ca „există", ambiguitatea existenței matematice. Degradarea înțelegerii și respingerea sensului comun duc la inadecvarea mijloacelor față de scopuri. Aceast fapt se reflectă în folosirea unor modele care, în loc să explice fenomenul studiat, devin autonome și sînt studiate ca un scop în sine.

Pentru a ilustra calitatea inferioară a comunicării matematice, Bishop se referă la relația profesor-student. Pentru un începător în ale matematicii, nu este natural să explici

pe „A implică B" prin relația, pretins echivalentă, „B sau non A". Dar mai importantă decît aceasta este chestiunea utilității definiției implicației logice. L.E.J. Brouwer, fondatorul intuiționismului matematic, pe care Bishop l-a luat ca punct de plecare, definește relația „A implică B" prin existența unui argument care arată în ce fel o demonstrație oarecare a lui A poate fi convertită (transformată) într-o demonstrație a lui B. De exemplu, „(A implică B) și (B implică C) implică (A implică C)", deoarece dispunem de următorul argument pe baza căruia din orice demonstrație a lui „A implică B" și a lui „B implică C" se obține o demonstrație a lui „A implică C": Fiind dată o demonstrație a lui A, ea poate fi convertită într-o demonstrație a lui B, iar aceasta din urmă poate fi transformată într-o demonstrație a lui C, deci orice demonstrație a lui A devine o demonstrație a lui C.

Un concept dintre cele mai delicate în comunicarea matematică este conceptul de demonstrație. Cei mai mulți matematicieni explică acest concept prin considerații formale. Pentru Bishop, orice argument complet convingător constituie o demonstrație. Acesta este al treilea principiu al constructivismului, în concepția lui Bishop; îl vom nota cu (C). Celelalte sînt: (A) Matematica este sensul comun; (B) Nu te întreba dacă un enunț este adevărat înainte de a înțelege semnificația lui; (D) Distincțiile de sens trebuie menținute.

Principiul (A) poate să mire, într-o perioadă în care matematica infinitului abundă în rezultate care contrazic simțul comun. Se cunosc, de asemenea, dificultățile legate de apariția paradoxelor și antinomilor. De aici însă pînă la un divorț global al matematicii de simțul comun este o cale lungă. Formalizarea a devenit un element de atracție datorită faptului că permite introducerea unei rigori pe baza căreia problemele de corectitudine pot fi rezolvate în mod aparent satisfăcător. Însă un minim respect pentru simțul comun ne obligă să acceptăm că dacă o demonstrație este atît de lungă încît corectitudinea ei nu poate fi controlată pe o cale informală, atunci nici testarea prin mijloace formale nu va fi posibilă. Anii care s-au scurs de la aceste observații ale lui Bishop le-au confirmat pe deplin. Demonstrația teoremei celor patru culori (1976) a produs tocmai insatisfacții de tipul semnalat de Bishop și se pare că și maratonica demonstrație a teoremei de clasificare a grupurilor simple a generat unele insatisfacții (exprimate, de

exemplu, de Michael Atiyah). Demonstrarea conjecturii lui Bieberbach a fost simplificată succesiv, pînă a devenit intuitivă.

Deosebit de interesant este principiul (B). El afirmă clar faptul că, înainte de a fi o problemă de sintaxă, matematica este o problemă de semantică. Numeroase neînțelegeri privind adevărul unui enunț sînt o consecință a faptului că diverși autori interpretează diferit enunțul respectiv. Pentru a explica deosebirea dintre atitudinea tradițională și cea constructivă, Bishop se referă la binecunoscuta teoremă de Analiză clasică, în baza căreia orice șir monoton și mărginit este convergent. În Analiza constructivă, această teoremă nu mai funcționează sau, mai precis, adevărul ei depinde de sensul atribuit enunțului teoremei. Intuiția clasică a unui șir crescător și mărginit este aceea a îngrămădirii termenilor în preajma unui punct unic determinat, situat la dreapta lor. Un constructivist, fără a nega că unele șiruri crescătoare și mărginite se comportă în acest fel simplist, consideră că un comportament mai complex, la fel de intuitiv, este acela în care, după ce șirul este pe cale de a da impresia că tinde către o valoare a, termenii săi „sar" la dreapta lui a, dînd impresia că se îngrămădesc în preajma unei valori b superioare lui a și așa mai departe. De exemplu, putem presupune că primii o mie de termeni se îngrămădesc în preajma lui a, următorii zece mii în preajma lui b, următorii o sută de mii în preajma unei valori c superioare lui b ș.a.m.d.

Principiul (C) nu poate fi acceptat fără (B), deoarece nu poți fi convins de adevărul unui enunț pe care nu-l înțelegi.

În ceea ce privește principiul (D), Bishop consideră că matematica clasică nu reușește să facă distincții semnificative relative la numerele întregi. Constructivistul nu se opune utilizării unui număr întreg m definit ca fiind egal cu zero dacă ipoteza lui Goldbach este adevărată (orice număr par superior lui 2 este suma a două numere prime) și egal cu unu în cazul contrar; dar pretinde ca un număr ca m să fie distins semantic, categorial, de un număr n definit ca fiind egal cu numărul numerelor prime inferioare lui zece la puterea zece la puterea zece. Într-adevăr, primul număr nu poate fi calculat, al doilea poate fi. Desigur, aici se pune problema distincției dintre calculabilitatea de principiu și cea de fapt, distincție atît de importantă azi în teoria complexității calculului.

La baza concepției sale constructive, E. Bishop așază următoarea teză: Orice număr întreg poate fi convertit, în principiu, într-o reprezentare zecimală, printr-un proces finit de pură rutină. Aici, cuvintele „în principiu" vor să spună că, deși s-ar putea programa la calculator obținerea reprezentării zecimale a oricărui număr întreg, există cazuri în care ar fi naiv să se ruleze acest program și să se aștepte rezultatul.

Din teza de mai sus se obține toată aritmetica numerelor întregi iar pe această aritmetică se bazează, după cum se știe, întreaga matematică. Dar pe parcursul demersului constructivist mai sînt necesare și alte precauții. Bishop introduce un așa-numit Principiu Limitativ de Omniscientă (PLO): Fiind dat un șir (n_k) de numere întregi, are loc alternativa : sau $n_k = 0$ pentru orice întreg pozitiv k, sau există un k pentru care n_k este diferit de zero.

În continuare Bishop se inspiră din ideile lui L.E.J Brouwer, A. Frănkel, Y. Bar-Hillel și S.C. Kleene. Brouwer a observat că semnificațiile asociate în mod obișnuit unor termeni ca *și*, *sau*, *nu*, *implică*, *există* și *oricare* nu sînt în întregime adecvate punctului de vedere constructiv. Conectivul *și* nu pune probleme. Pentru a demonstra pe *A și B*, procedeul constructiv nu diferă de cel clasic: demonstrăm pe *A* și apoi pe *B*. Pentru a demonstra pe *A sau B* trebuie să găsim un procedeu pur rutinar, care după un număr finit de pași conduce sau la demonstrarea lui *A*, sau la demonstrarea lui *B*. Este vorba aici de o utilizare a lui *sau* foarte diferită de cea clasică. De exemplu PLO este adevărat în sensul clasic, dar nu știm ce devine la o utilizare constructivă a lui *sau*. Despre *implică* am discutat în paragraful anterior, constatînd că interpretarea sa constructivă diferă de cea clasică. Prin *non A* înțelegem că afirmația A este contradictorie, cu alte cuvinte este de neconceput să se obțină o demonstrație a lui *A*. De exemplu, dacă prin *A* înțelegem egalitatea $0 = 1$, atunci *non A* este adevărată. *A* revine aici la faptul că dacă numerele 0 și 1 sînt exprimate în reprezentare zecimală, atunci o procedură mecanică verifică eventuala lor egalitate. Dar numerele considerate sînt deja în formă zecimală și compararea lor arată că sînt diferite, deci nu este posibil să se demonstreze că ele sînt egale. Tot așa, afirmația *non (A și non A)* este adevărată oricare ar fi *A*, deoarece, dacă demonstrăm pe

non A, devine imposibil să demonstrăm pe *A*, deci cu atît mai mult devine imposibil să demonstrăm pe *A şi non A*.

Cu astfel de modificări privind semnificaţia conectivelor, este de aşteptat să se producă schimbări şi în înţelegerea modalităţilor de inferenţă. Principalul principiu pus în discuţie este cel al terţului exclus: *A sau non A*. Din punct de vedere constructiv, acest principiu ar însemna existenţa unei proceduri care, într-un număr finit de paşi pur rutinari, ar conduce la demonstrarea sau infirmarea unei aserţiuni matematice arbitrare *A*. Dar, firește, nu dispunem de o atare procedură şi nimeni nu speră s-o găsească. Principiul terţului exclus se plasează deci în afara matematicii constructive; mai mult, el este răspunzător de cele mai importante neconstructivităţi din matematica clasică. Un alt principiu neconstructiv este *(non non A) implică A*. Cu alte cuvinte, o demonstraţie a imposibilităţii unei anumite construcţii, de exemplu, nu constituie o metodă de obţinere a construcţiei respective.

O altă contestaţie a matematicii constructive se referă la conceptul clasic de mulţime ca parte a unui univers preexistent, aşa-numita mulţime totală din care sînt extrase toate mulţimile considerate. Acest postulat al unui univers preexistent nu poate fi acceptat din punct de vedere constructiv. Întrebarea *Ce este o mulţime?* devine suspectă, fiind înlocuită cu *Ce trebuie să facem pentru a construi o mulţime?* Răspunsul dat de Bishop este următorul: Pentru a construi o mulţime, urmează să specificăm ce trebuie făcut în vederea construirii unui element arbitrar al mulţimii şi pentru a demonstra eventuala egalitate a două elemente ale mulţimii (egalitatea trebuind să fie o relaţie de echivalenţă). De exemplu, pentru a construi un număr raţional (adică un element al mulţimii numerelor raţionale), definim întregii p şi q şi demonstrăm că q este diferit de zero. Pentru a demonstra egalitatea numerelor p/q şi r/s, arătăm că $ps = qr$.

Să ne îndreptăm acum atenţia asupra cuantificatorilor. Fie $A(x)$ o aserţiune depinzînd de parametrul x care parcurge mulţimea S. Pentru a demonstra că $A(x)$ este adevărată oricare ar fi x în S, trebuie să indicăm o metodă care asociază fiecărui x din S o demonstraţie pentru $A(x)$. După cum vedem, cuantificatorul universal este în matematica constructivă acelaşi ca şi în matematica obişnuită. Mai delicate sînt lucrurile cu cuantificatorul existenţial. Într-adevăr, ce înseamnă *există* din punct de vedere constructiv? Pentru a demonstra că există x astfel încît $A(x)$, trebuie

să construim un element x_0 al lui S, în conformitate cu principiile prevăzute în definiția lui S, apoi să demonstrăm enunțul $A(x_0)$.

Unele utilizări clasice ale cuantificatorilor eșuează în gîndirea constructivă. În matematica clasică admitem că *Dacă nu este adevărat că pentru orice x avem A(x), atunci există. x pentru care avem non A(x)*. Constructiv, această implicație nu mai este validă. Este însă validă constructiv implicația (evident valabilă în matematica clasică): *Dacă nu este adevărat că există x pentru care A(x), atunci pentru orice x avem non A(x)*. Importantă observația lui Bishop: toate aceste constatări sînt în concordanță cu sensul comun, cu logica bunului simț.

Există diferite grade de neconstructivitate. O primă treaptă constă în acceptarea PLO. Într-o a doua etapă putem accepta atît PLO cît și PTE (principiul terțului exclus). Într-o a treia etapă putem accepta PLO, PTE și AA (axioma alegerii). Desigur, cu cît acceptăm mai multe principii, cu atît mai bogată va fi colecția de teoreme pe care le vom putea demonstra. Dar dacă teoremele neconstructive sînt mai multe, cele constructive sînt mai semnificative. Mai mult, fiecărei teoreme neconstructive i se asociază o teoremă constructivă, cu aceeași semnificație. De exemplu, dacă dintre principiile neconstructive acceptăm numai pe PLO, atunci fiecărei teoreme A neconstructive îi corespunde teorema după care *PLO implică A*. Pe de altă parte, dacă un constructivist stabilește o teoremă, ea va putea fi regăsită și neconstructiv, dar va fi mai puțin semnificativă. Interpretarea clasică a conjecturii lui Goldbach este mai săracă decît interpretarea ei constructivă. O situație mai interesantă este aceea a unui enunț de tipul: „Numărul zerourilor pe primele n poziții după virgulă, în dezvoltarea zecimală a lui *pi*, nu întrece dublul numărului de cifre egale cu 1 pe primele n poziții". Chiar o demonstrație constructivă a unui atare enunț ne-ar lăsa o oarecare îndoială privind corectitudinea predicției pentru orice valoare particulară a lui n, de exemplu pentru $n = 1\,000$.

NUMERE CONSTRUCTIVE

După cum s-a putut vedea, Bishop a pornit, în edificarea concepției sale constructiviste, de la ideile lui L.E.J. Brouwer, inițiatorul intuiționismului matematic. Acest fapt s-a reflectat chiar în punctul de plecare; ca și Brouwer,

Bishop începe cu numerele naturale. Principiul limitativ al omniscienței (PLO) (care afirma că fiind dat un șir (a_n) cu valori în mulțimea $\{0, 1/\}$, sau toți termenii a_n se anulează, sau există un întreg p pentru care $a_p = 1$) este de asemenea de inspirație brouweriană. În același timp însă, Bishop a știut să-și ia distanța față de Brouwer exact în punctul în care acesta din urmă a eșuat: Edificarea unui constructivism cît mai simplu, ușor acceptabil de matematicienii care nu sînt orientați spre problemele de logică și de fundamente. Într-o anumită măsură, această înclinare puternică spre aspectele metamatematice se manifestă și în alte concepții constructiviste, cum este aceea dezvoltată de A.A. Markov pe baza noțiunii de algoritm normal (echivalentă cu noțiunea de funcție recursivă); fiecare funcție este aici gîndită în termenii numărului Gödel asociat, fiecare număr real este o funcție recursivă specifică. Școala lui Markov, puternic dezvoltată în Uniunea Sovietică (a se vedea, în mod special, lucrările ramurii de la Leningrad ale acestei școli, avînd ca protagonist pe N. Šanin) este acum orientată cu precădere spre teoria complexității algoritmice și spre aplicațiile acesteia în informatică. Bishop își ia distanța și față de constructivismul recursiv, propunînd în schimb o terminologie și o notație pe care unii (ca Douglas Bridges și Ray Mines, *What is constructive mathematics?*, The Mathematical Intelligencer, vol. 6, 1984, no. 4, p. 32—38) le socotesc simple și naturale, dar alții (ca D.H. Fremlin, în recenzia sa la cartea lui Bishop, publicată în „Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society" 1981, no. 24, p. 147—148) le consideră greoaie pentru publicul matematic general.

După ce, în etapele anterioare, am văzut care sînt precauțiile metodologice ale gîndirii constructive a lui Bishop, să vedem acum ce formă iau cîteva dintre conceptele fundamentale ale matematicii. Să ne referim mai întîi la noțiunea de funcție (definită pe mulțimea numerelor întregi și cu valori în aceeași mulțime). Ea constă într-o *regulă* f care asociază fiecărui întreg n definit constructiv un întreg $f(n)$ definit constructiv, cu alte cuvinte reprezentarea sa zecimală poate fi determinată printr-o procedură finită de rutină. Definiția se extinde la cazul în care funcția este definită pe mulțimea numerelor raționale și ia valori în aceeași mulțime. O funcție definită pe mulțimea întregilor pozitivi se numește *șir*, iar dacă valorile acestei funcții sînt numere raționale spunem că avem un *șir de numere raționale*.

Ajungem acum la noțiunea de *număr real*, definit ca șir Cauchy de numere raționale. Deosebirea față de definiția tradițională a numărului real constă, după cum se observă, în faptul că un număr real nu mai este o *clasă* de șiruri Cauchy echivalente de numere raționale, ci un *șir individual* de acest tip. Exact așa cum mulțimile nu sînt, în mentalitatea constructivistă, entități preexistente (părți ale unui univers prealabil), ca în teoria lui G. Cantor, nici numerele reale nu sînt entități preexistente, care așteaptă, în clasele lor de echivalență, să fie descoperite și convocate. Numerele reale nu sînt descrise, ci construite. Pentru a construi un număr real trebuie să indicăm o procedură rutinară finită care asociază fiecărui întreg pozitiv n un număr rațional $a(n)$, astfel încît șirul $(a(n))$ să fie un șir Cauchy la care rata de convergență poate fi explicitată; cu alte cuvinte, diferența dintre doi termeni ai șirului devine oricît de mică dorim de îndată ce rangul acestor termeni este suficient de mare, ordinul de micime al distanței și de mărime al rangului fiind explicit indicat ($|a_n - a_m| < 1/n + 1/m$ pentru orice $m, n \geqslant 1$).

Este de așteptat ca, în condițiile în care numărul real nu mai este o clasă de șiruri, ci un șir individual de numere raționale, să rămînă deschisă posibilitatea ca două șiruri diferite să definească numere egale. Vom spune că numerele reale $(a(n))$ și $(b(n))$ sînt egale dacă pentru n destul de mare diferența $a(n) - b(n)$ devine în valoare absolută mai mică decît $2/n$. Mai delicată este definirea relației de mărime. Ce înseamnă că un număr real este mai mic decît altul? Ce înseamnă că a este mai mic sau egal cu b? În ceea ce privește numerele reale tradiționale, ele sînt guvernate de proprietatea de tricotomie: Fiind date două numere reale a și b, are loc una și numai una dintre relațiile: a mai mic decît b, a egal cu b, a mai mare decît b. Putem „salva" proprietatea de tricotomie atunci cînd trecem la numere reale constructive? Nu vom intra aici în detalii, dar vom spune că răspunsul este negativ. S-ar părea că această situație reduce considerabil interesul numerelor reale constructive. Nu se întîmplă așa, deoarece are loc o proprietate „vecină" cu tricotomia: Fiind date trei numere constructive a, b și c, astfel încît a este mai mic decît b, este satisfăcută una dintre următoarele două situații: a este mai mic decît c sau c este mai mic decît b. Nu este greu de văzut că tricotomia implică proprietatea enunțată; dar reciproca nu este adevărată ($a < b$ se definește prin existența unui $n \geqslant 1$ cu $|b_{2n} - a_{2n}| > 1/n$).

De o manieră mai generală, putem spune că, în matematica constructivă, pentru a demonstra că există un obiect x cu proprietatea P trebuie să producem un procedeu rutinar finit de construire a lui x și un procedeu rutinar finit prin care verificăm dacă x are proprietatea P. Cu alte cuvinte, în mentalitatea constructivistă orice demonstrație de existență a unui obiect x trebuie să includă construcția efectivă a lui x. Contrastul cu atitudinea tradițională este vizibil. O demonstrație neconstructivă de existență a unui obiect x constă de multe ori în a arăta că presupunerea „x cu proprietatea P nu există" duce la o contradicție. Însă prin aceasta demonstrăm imposibilitatea inexistenței lui x, fără ca de aici să decurgă un procedeu de obținere a lui x. Dar chiar dacă ne aflăm în posesia unui atare procedeu, mai este nevoie de unele construcții auxiliare pentru a arăta că x are proprietatea P dorită; nu este suficient să arătăm că dacă nu ar avea această proprietate s-ar obține o contradicție.

Să luăm, de exemplu, enunțul dat de PLO. Dacă el ar fi valabil din punct de vedere constructiv, ar însemna să existe o procedură finită rutinară prin care să se stabilească pentru orice șir binar (a_n) că satisface alternative prevăzută de PLO. Dacă am dispune de o atare procedură, atunci am fi în posesia unei metode uniforme de rezolvare a unor probleme deschise celebre, de la problema lui Fermat și ipoteza lui Riemann pînă la conjectura lui Goldbach. De exemplu, pentru testarea acesteia din urmă ne-am prevala de șirul (a_n) în care $a_n = 0$ dacă pentru orice k cuprins între 1 și n numărul $2k$ este suma a două numere prime și $a_n = 1$ în cazul contrar. Este însă foarte puțin probabil să se găsească vreodată o astfel de procedură; de aceea PLO nu este acceptat în matematica constructivă. Orice teoremă care implică PLO este și ea considerată neconstructivă. De exemplu, existența unei funcții care asociază oricărui număr rațional valoarea 1 și oricărui număr irațional valoarea zero nu are caracter constructiv. Este deci clar că în matematica constructivă multe cuvinte obișnuite, începînd cu *există* și *și*, și terminînd cu *număr real* au cu totul alt înțeles decît în matematica tradițională.

ŞAHUL ÎN FAŢA MATEMATICII

ESTE ŞAHUL MATEMATICĂ?

S-a spus de multe ori că şahul este matematică. Elementul cel mai izbitor în această analogie îl constituie caracterul deductiv şi condiţionarea riguroasă a fiecărei etape de etapele anterioare. De aici, ideea de *calcul* subjacentă atît şahului cît şi matematicii. În sprijinul acestei analogii pledează şi pasiunea pentru şah a multor matematicieni. Unii dintre ei au la activul lor performanţe în ambele domenii. După primul campion mondial de şah, Steinitz, a urmat un important algebrist, Emanuel Lasker care a devenit bine cunoscut atît ca şahist, fiind într-o anumită perioadă campion mondial, cît şi ca matematician. Să menţionăm în primul rînd celebrul său memoriu *Zur Theorie der Moduln und Ideale* (publicat în revista Mathematische Annalen, vol. 60, 1905, p. 20—116), prin care Lasker se manifestă ca un important continuator al marelui aritmetician şi algebrist Richard Dedekind (în ceea ce priveşte aritmetica întregilor algebrici) şi ca un precursor al celebrei algebriste Emmy Noether (al cărei părinte, Max Noether, de asemenea matematician, l-a inspirat pe Lasker, prin importanta sa lucrare privind curbele algebrice *Über einen Satz aus der theorie der algebraischen Funktionen*, Mathematische Annalen, vol. 6, p. 351—359).

DEDUCŢIA NU PRIMEAZĂ NICI ÎN ŞAH, NICI ÎN MATEMATICĂ

Totuşi, afinitatea dintre şah şi matematică a fost de multe ori contestată. Este mai întîi interesant faptul că o serie de matematicieni au contestat ideea că matematica ar fi în primul rînd deducţie. Cel mai recent exemplu în această privinţă îl constituie Paul R. Halmos (în cartea sa *I want to be a mathematician*, Springer, New York, 1985). Am avut totdeauna impresia că logica deductivă este numai faţada şi igiena matematicii, nu şi substanţa ei. Nu cumva un fenomen asemănător se întîmplă cu şahul? Am discutat

această chestiune într-un ciclu de articole *(De ce şahul?*, I—IV, Viaţa Studenţească, nr. 35—38, 29 oct.— 19 nov. 1980) şi din mărturiile evocate a rezultat că răspunsul este probabil afirmativ. Am arătat acolo că Nell Charness, care în 1974 susţinuse o teză de doctorat privind psihologia jocului de şah, a ajuns la concluzia că un jucător de şah se bazează nu atît pe analize deductive, cît pe capacitatea sa de memorie şi pe organizarea informaţiei în termeni de configuraţii plauzibile de piese, mişcări posibile şi consecinţe ale lor. Recunoaşterea configuraţiilor face parte din preocupările unui domeniu în plină dezvoltare, „Recunoaşterea formelor" *(Pattern Recognition)*. De asemenea, după cum arăta Peter W. Frey *(Chess skill in man and machine*, Springer, New York, 1977*)*, alegerea unei mutări pare să fie condiţionată în primul rînd de calitatea percepţiei şi, în mod special, de capacitatea de a recunoaşte un imens număr de procedee de joc disponibile, deci acumulate şi catalogate de experienţa şahistă anterioară. Şahul s-a dovedit a fi nu atît un joc implicînd un calcul foarte lung cît unul de observaţie, de intuiţie a situaţiei de pe tabla de joc. Unui maestru îi este suficientă o privire sumară pentru a sesiza o mutare bună, în timp ce un începător este în stare ca, chiar după o lungă reflecţie, să facă o mutare dezavantajoasă. Ceea ce-i deosebeşte nu este neapărat profunzimea gîndirii. Arborele de posibilităţi care mereu se ramifică în funcţie de răspunsul ipotetic al partenerului este de obicei examinat pînă la un nivel care este cam acelaşi şi la un simplu amator şi la un specialist. Acest nivel pare a fi determinat nu de gradul de pregătire şahistă, ci de restricţiile generale care guvernează atenţia, memoria şi raţiunea. Însă în timp ce profanul analizează aceste posibilităţi la întîmplare, cunoscătorul le ierarhizează aproape spontan, dînd prioritate anumitor variante.

ÎNTRE HERMANN HESSE ŞI GR. C. MOISIL

Într-o convorbire cu studenta Irina Gorun, publicată în revista „Tînărul Leninist" (mai 1973), Gr. C. Moisil este provocat de interlocutoare în ceea ce priveşte o posibilă asociere a matematicii cu faimosul joc cu mărgelele de sticlă al lui Hermann Hesse. Răspunsul lui Moisil: „Problema aşa nu ştiu să se fi pus, dar nu este mult diferită de problema care s-a pus sau, mai repede, afirmaţia care s-a făcut: „matematica — joc de şah". Evident, deosebirea dintre afir-

mația gravă „matematica — joc de șah" și afirmația zglobie „matematica — joc de mărgele" este sensibilă pentru oricine, dar asemănarea lor este mai accentuată decît deosebirea. Cel puțin la prima vedere. Adică privitor la „gratuitatea" matematicilor, fiindcă afirmația „matematica este un joc de șah" implică existența unor reguli foarte rigide/ ... / Sînt regulile raționamentului deductiv". Să amintim că „jocul cu mărgelele de sticlă" nu este niciodată explicitat în romanul lui Hesse, el trebuie construit prin imaginație de fiecare cititor, ca o formă supremă a interferenței matematicii cu muzica, dominînd întreaga activitate creatoare (fie ea științifică sau artistică) a unei societăți utopice. Tocmai în această opoziție dintre caracterul implicit al regulilor jocului lui Hesse și caracterul explicit al regulilor jocului de șah se află explicația preferinței lui Moisil pentru analogia matematică — șah față de analogia matematică — jocul cu mărgele de sticlă. Însă, după ce a văzut în regulile raționamentului deductiv substratul comun al șahului și matematicii, Moisil revine la analogia dintre matematică și jocul lui Hesse: „E probabil că unii matematicieni au impresia că joacă un joc cu mărgelele de sticlă. Am impresia, din amintirile mele, că această atitudine este caracteristică pentru o anumită vîrstă. Nu face rău nimănui, fiindcă jocul matematic poate să apară celui care îl joacă un joc gratuit (cuvîntul *gratuit* se întrebuința adesea pe vremea mea). Nu înseamnă că ceea ce i se pare cuiva că e gratuit chiar e gratuit. Nu e exclus ca cel care juca jocul cu mărgelele de sticlă să fi fost un muncitor care organiza refracții și reflecții multicolore în mărgelele de sticlă ce serveau, fără ca el să știe, unei industrii foarte folositoare societății în care se petrece romanul (...) Altora poate li se pare că facem un joc cu teoreme care nu servesc nimănui, cu demonstrații inutile. Văzută din afara lumii și a timpului, matematica poate să pară un joc".

ȘAHUL ȘI INTELIGENȚA ARTIFICIALĂ

O întrebare se impune. Oare bănuiala lui Moisil că jocul cu mărgelele de sticlă ar fi putut avea și o funcție utilitară nu este la fel de legitimă în ceea ce privește șahul? Ce altceva este lucrarea fostului campion mondial M. Botvinnik pe care am cunoscut-o în traducere în engleză (*Chess and long-range planning*, Springer, New York, 1970), în care se încearcă valorificarea strategiilor șahiste în metodologia

planificării economice pe termen lung? Ce este cercetarea întreprinsă de A. Newell, J. Shaw și H. Simon (*Chess-playing programs and the problem of complexity*, IBM J. Res. Develop. 1958, no. 2, p. 320—335) și mai cu seamă aceea efectuată de A. Newell și H. Simon (*Human problem solving*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.S.) pentru care lămurirea naturii gîndirii șahiste poate avea consecințe importante în ceea ce privește înțelegerea gîndirii algoritmice și a inteligenței artificiale, dacă se ia în considerare și laboratorul experimental pe care-l constituie șahul computațional? Exemplele nu se opresc aici. Șahul constituie un model epistemologic pentru numeroase discipline științifice, de la lingvistică și semiotică pînă la etnologie și matematică. Spre deosebire de jocul cu mărgelele de sticlă, a cărui funcție utilitară este pur ipotetică, jocul de șah și-a și dovedit capacitatea explicativă în raport cu fenomene culturale dintre cele mai variate.

DE LA SHANNON LA BOTVINNIK

Claude E. Shannon (*Programming a computer for playing chess*, „Philosophical Magazine", 1950, vol 41, p. 256—275) este primul care și-a pus problema realizării unui program de calculator pentru șah. Se știe că activitățile care fac obiectul unui sistem de conducere și control comportă două tipuri de situații, după cum sistemul este sau nu capabil să prelucreze întreaga informație care i se furnizează. În primul caz avem o problemă exactă, în cel de-al doilea una inexactă. Însă o aceeași sarcină de conducere și control poate conduce la o problemă exactă sau la una inexactă, în funcție de posibilitățile sistemului considerat. Elaborarea unui program de calculator pentru jocul de șah constituie o problemă inexactă, dar ar putea deveni o problemă exactă într-un stadiu mai avansat de dezvoltare a calculatoarelor și a teoriei programării.

Putem formula problema și altfel. În activitatea algoritmică a unui sistem de conducere și control distingem doi parametri: numărul variantelor analizate și adîncimea de analiză. Este clar că o creștere a unuia dintre acești doi parametri ne obligă la o micșorare a celuilalt parametru. Avem astfel două strategii șahiste, după cum decidem să analizăm un număr mai mare, eventual cel mai mare posibil, de variante de mutări, însă admițînd o adîncime relativ redusă de analiză (cu alte cuvinte, arborele variantelor va

avea un număr foarte mare, eventual maxim, de ramuri, toate ramurile avînd aceeași lungime, relativ redusă) sau un număr relativ mai mic de variante, însă cu o adîncime mai mare decît în prima strategie. Shannon și-a dat seama că cea de a doua strategie este mai bună. Într-adevăr, printre diferitele variante de mutări care se înfățișează unui jucător există multe care se exclud aproape instantaneu prin neoportunitatea lor; ce rost ar avea să încărcăm un program de calculator cu analiza detaliată a unor mutări de acest fel? În schimb, fiind foarte selectivi cu variantele pe care le reținem, avem posibilitatea să desfășurăm analiza lor pînă la o adîncime mult mai mare.

Se știe că investigația lui Shannon a fost continuată, între alții, și de Mihail Botvinnik (op. cit.), iar apoi au urmat, pînă în zilele noastre, numeroase alte cercetări. La o teorie matematică a jocului de șah încă nu s-a ajuns, nu avem încă pentru șah o carte de tipul aceleia pe care marele matematician francez Emile Borel a scris-o pentru jocul de bridge sau de tipul celor existente pentru jocul GO. Natura preponderent probabilistă a jocului de bridge este evidentă, după cum este clară natura combinatorial-topologică a jocului GO. Dar șahul în ce încrengătură a matematicii s-ar situa? Faptul că fondatorul Teoriei matematice a informației, Claude Shannon, s-a ocupat cel dintîi de programarea șahului la calculator ne dă de bănuit că în șah aspectele informaționale au un rol important. Entropiile informaționale de diverse ranguri (a se vedea, pentru această chestiune, capitolul al VIII-lea din lucrarea noastră în colaborare *Introducere în lingvistica matematică*, Editura Științifică, 1966) ne-ar putea ajuta să distingem mai riguros între valoarea intrinsecă a unei piese și valoarea ei pozițională (aceasta din urmă corespunzînd unei entropii de ordin superior). Poate că și *energia informațională Onicescu* (a se vedea, pentru o prezentare elementară, capitolul al VI-lea din lucrarea noastră *Poetica matematică*, Editura Academiei, 1970) ar fi relevantă aici. Teoria matematică a jocurilor și teoria matematică a deciziei nu pot fi ignorate de nici un cercetător al strategiei șahiste, deoarece în șah jucătorii trebuie să ia, alternativ, decizii în vederea cărora elaborează strategii. Nu mai puțin important este aspectul combinatorial, care dă posibilitatea să se reprezinte structura diferitelor noi configurații ulterioare posibile. La fel de important este aspectul logic.

În orice moment al desfăşurării unei partide de şah, configuraţia pieselor împreună cu regulile care guvernează folosirea lor corespund unui adevărat sistem formal, în sensul logicii matematice. Să amintim, după David Hilbert, definiţia noţiunii de sistem formal. Se consideră mai întîi o mulţime finită V numită *vocabular*. Elementele din V sînt *cuvinte*. Fie un *limbaj* L pe V, adică o colecţie (finită sau infinită) de şiruri finite de cuvinte. Un şir de acest fel constituie o *frază* şi are forma $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$, unde fiecare termen a_i (i variabil de la 1 la n) este un cuvînt, iar n se numeşte *lungimea* frazei. Despărţim pe L în două părţi L_1 şi L_2 fără fraze comune. Frazele din L_1 se numesc *termeni* iar cele din L_2 se numesc *relaţii*. În L_2 distingem o anumită parte formată din *teoreme*. De obicei, teoremele unui sistem formal sînt introduse cu ajutorul a două noţiuni auxiliare: noţiunea de *axiomă* şi noţiunea de *text demonstrativ*. Axiomele sînt cazuri particulare de relaţii, deci ele alcătuiesc o mulţime A conţinută în L_2. Un text demonstrativ este definit ca un şir de relaţii (adică de fraze din L_2), astfel încît orice relaţie din şir sau este o axiomă, sau poate fi dedusă din relaţiile precedente din şir, prin folosirea unui sistem K determinat de *reguli*. O teoremă poate fi acum definită ca o relaţie conţinută într-un text demonstrativ.

Să încercăm acum să vedem cum s-ar încadra şahul în ideea de sistem formal. O teoremă ar fi orice configuraţie posibilă a pieselor pe tabla de şah; cu alte cuvinte, este teoremă orice configuraţie la care se poate ajunge, cel puţin în principiu, prin plecarea din poziţia iniţială prevăzută de regulamentul jocului de şah şi printr-o desfăşurare a jocului conformă cu regulile jocului. Unica axiomă ar fi configuraţia iniţială a pieselor. Şirul de configuraţii prin care se trece de la configuraţia iniţială, adică de la axiomă, la configuraţia existentă la un anumit moment pe tabla de şah, într-o desfăşurare regulamentară a jocului, constituie un text demonstrativ. Este deci clar că, prin convenţiile adoptate, teoremele şahului sînt configuraţiile care pot fi inserate în texte demonstrative.

Sistemul K de reguli este constituit, în cazul şahului, de regulile de folosire a celor şase tipuri de piese. Să observăm aici că o piesă de şah este definită *exclusiv* prin regimul ei sintactic şi prin poziţia ei iniţială. De exemplu, piesa numită *nebun* este complet definită de faptul că se află iniţial pe una dintre poziţiile $C1$, $F1$ (nebunii albi), $C8$, $F8$

(nebunii negri) și se poate deplasa în diagonală în toate direcțiile și pe orice distanță liberă, putînd ataca și înlătura din joc prima piesă de culoare diferită întîlnită pe parcurs, prin ocuparea poziției respective. Faptul că piesa *nebun* are o anumită formă și mărime este neesențial, servind numai la identificarea și recunoașterea ei imediată. Nimic nu s-ar schimba în jocul de șah dacă am conveni ca pionii să aibă forma și mărimea pe care le aveau pînă acum nebunii și, invers, nebunii să fie material reprezentați de piese avînd forma și mărimea pe care le aveau pînă acum pionii. Ar fi poate o oarecare dificultate psihologică de adaptare la noua convenție, dar depășirea ei ar constitui numai o chestiune de timp. Nici culorile alb și negru nu sînt esențiale. Am putea folosi în locul lor galben și albastru sau portocaliu și verde. Mai mult, am putea renunța la distincția pe bază de culoare dintre piesele celor doi parteneri, folosind o distincție de alt tip, exprimată prin orice trăsătură pe care piesele unuia dintre parteneri ar avea-o iar ale celuilalt nu.

ESTE GÎNDIREA ȘAHISTĂ SECVENȚIALĂ SAU BIDIMENSIONALĂ?

Ajungem acum la o chestiune delicată privind structura unui sistem formal. Am văzut că teoremele sînt cazuri particulare de relații, care, la rîndul lor, sînt fraze pe un vocabular finit. Cum asigurăm acest caracter secvențial, liniar al teoremelor, în condițiile în care, după cum se știe, configurațiile pe care le obținem pe tabla de șah sînt bidimensionale? Există două căi de depășire a acestei dificultăți. O cale ar consta într-o modificare a definiției unui sistem formal, care să permită transgresarea restricției de secvențialitate. În matematica modernă există sisteme formale de acest tip mai general, un exemplu în acest sens fiind *gramaticile picturale* (despre care cititorul român poate afla unele lucruri din volumul colectiv pe care l-am coordonat la Editura Științifică și Enciclopedică în 1982, *Semiotica matematică a artelor vizuale*). O tentativă în acest sens, în ceea ce privește șahul, ar fi necesară. Există însă și o altă cale, care se situează în cadrul liniar, secvențial, al sistemelor formale clasice, așa cum au fost ele concepute de Hilbert în deceniul al treilea al secolului nostru. Într-adevăr, deși configurațiile de piese pe tabla de șah sînt bidimensionale, jocul de șah ca atare are o desfășurare secvențială, care poate fi descrisă și înregistrată sub formă liniară, cum se și întîmplă cînd relatăm în scris o partidă de șah. Este necesară o anumi-

tă precauție în alegerea vocabularului. Nu este greu de văzut că orice mutare în șah poate fi descrisă secvențial cu ajutorul unui vocabular format din opt elemente, asociate cu deplasări în cele opt poziții posibile în jurul unei anumite poziții: $a \triangleq$ în față, $b =$ la stînga sus, $c =$ la stînga mijloc, $d =$ la stînga jos, $e =$ în spate, $f =$ la dreapta jos, $g =$ la dreapta mijloc, $h =$ la dreapta sus. Mai este nevoie să suplimentăm vocabularul cu elemente care fixează pozițiile inițiale și pozițiile ulterior posibile (în limitele celor 64 de pătrate albe și negre). Dacă, de exemplu, poziția inițială D_2 a unui pion alb ar fi exprimată prin litera *m*, atunci mutarea sa în D_4 ar fi exprimată prin *maa*.

Nu insistăm aici într-o direcție care ne-ar duce la prea multe complicații tehnice. Să observăm numai că sistemul formal schițat mai sus înregistrează numai ceea ce este permis în jocul de șah, neaducînd nici o indicație în ceea ce privește găsirea unei strategii de cîștig. Dar înțelegerea riguroasă a permisiunii ne ajută la înțelegerea posibilităților de cîștig. Alte instrumente și viziuni matematice intră acum în scenă.

O observație finală se impune. Caracterul calculatoriu, analitic—deductiv, al șahului este diminuat de restricțiile de durată impuse de regulamentul jocului de șah. Aceste restricții îi obligă pe jucători să suplinească, în anumite momente, analiza unei situații printr-o percepție intuitiv—holistică. Poate însă că ar trebui să distingem și la șah, așa cum se face în studiul altor acțiuni umane, între competență și performanță. Competența șahistă este dată exclusiv de ansamblul regulilor de folosire a pieselor. Tot ceea ce se adaugă la aceste reguli, circumstanțele exterioare de desfășurare, specificul de loc și moment țin de performanța (în sens psihologic, nu competițional) șahistă. Desigur, și competența șahistă își are istoria ei, dar modificările sale au fost incomparabil mai lente.

ÎNVĂȚĂMÎNTUL — DILEME ȘI SPERANȚE

În întreaga lume, educația și învățămîntul trebuie să facă față unor imperative foarte eterogene; pregătire profesională, dar și civică, moral-ideologică; teoretică, dar și practică; adaptivă, dar și inovativă; stabilitate, dar și mobilitate (politehnizare); specializare, dar și interdisciplinaritate; comanda socială imediată, dar și cea îndepărtată; dezvoltarea rațiunii, dar și a sentimentelor; formarea aptitudinilor tehnico-științifice, dar și a receptivității față de artă și literatură.

Este oare satisfacerea concomitentă a tuturor acestor deziderate o imposibilitate? Sîntem oare confruntați cu tendințe divergente, imposibil de împăcat? A devenit educația un fel de cuadratură a cercului, față de care orice încercare este sortită eșecului? A devenit școala o instituție anacronică?

Fiecare din dihotomiile enumerate mai sus a făcut obiectul unor polemici răsunătoare. Este recunoscut faptul că educarea valorilor morale a rămas uneori în urma transmiterii de cunoștințe. Școala face eforturi de a se adăpta unei societăți care se transformă rapid și uneori imprevizibil. Eșecurile în unele țări au fost atît de numeroase încît unii autori au cerut desființarea școlii iar cererea lor putea să pară plauzibilă într-o vreme în care — așa cum arată unele anchete sociologice — copiii americani (și oare numai ei?) din clasele elementare petreceau mai mult timp în fața televizorului decît la școală.

Educația și învățămîntul fac parte dintre acele probleme ale omenirii care așteaptă soluții radicale, pe care numai o nouă ordine internațională le poate aduce. În 1980, 113 țări, totalizînd peste două treimi din populația lumii, dispuneau de numai 9% dintre inginerii, tehnicienii și oamenii de știință ai lumii. Această situație este în perfectă concordanță cu faptul că unei părți de 60% din populația globului

îi revin numai șase procente din cheltuielile mondiale pentru instrucție școlară. Din 20 de fete de țărani săraci ai „lumii a treia" numai una merge la școală. În 1980, 240 de milioane de copii între 5 și 14 ani nu mergeau la școală.

Preconizăm un echilibru între termenii fiecărei dihotomii enumerate la început. Între acești termeni există de fapt o atracție reciprocă; însă pentru a o descoperi este nevoie de un efort fără de care termenii în cauză pot părea în contradicție. Astfel, teoria și practica au nevoie una de cealaltă, dar dacă teoria este neinteligibilă, sau dacă practica este derizorie, alianța lor este sabotată. Un manual prost poate compromite o programă bună. Un plan de învățămînt supraîncărcat poate anula avantajul unui manual bine făcut. Un profesor plictisit poate ucide cea mai captivantă temă. O alegere greșită a locului de muncă al unor absolvenți le poate paraliza acestora elanurile creatoare. Învățămîntul se adaptează încă greu caracterului precumpănitor interdisciplinar al cercetării. Poate că uneori mai greșim în ceea ce privește locul disciplinelor literar-artistice în raport cu cele tehnice. Poate că preocupați de a reduce și — dacă se poate — de a elimina rebuturile în învățămînt, nu am mai dat atenția cuvenită tinerilor excepționali.

Spiritul analitic, hipertrofiat de tendința de a desface lucrurile în componentele lor cele mai neînsemnate, deviază uneori în efecte negative, care blochează percepția integrală a fenomenului educațional. Această percepție este altceva decît recompunerea, prin sinteză, a rezultatelor analizei; ea este o înțelegere *directă*, deopotrivă intelectuală și emoțională, a procesului atît de complex al educației. Măsura prin care universitățile preiau activitățile de perfecționare a corpului didactic, de acordare de grade cadrelor didactice din învățămîntul elementar, gimnazial și liceal, este deosebit de binevenită. Sînt convins că, prin acest contact direct cu realitatea vie a școlii, cadrele didactice universitare vor fi în măsură să contribuie la elaborarea unor manuale școlare mai bune decît cele existente. Ameliorarea procesului de învățămînt, azi, presupune o cît mai bună cunoaștere a situației actuale a absolvenților noștri de ieri. Inițiative ca aceea a Facultății de Matematică din București, de a organiza o anchetă printre absolvenții ei din ultimii 20 de ani, ne ajută să fim cît mai eficienți în domeniul atît de delicat al formării noilor generații.

In acest proces general de reconsiderare a problemelor științei și învățămîntului, matematica se află în una dintre situațiile cele mai complexe și mai contradictorii. Dar, așa cum am încercat să arătăm sau măcar să sugerăm în cartea de față, matematica este, dincolo de jargonul ei atît de special, un fenomen uman complet și inevitabil, pe care orice om cult va trebui să și-l asume. Succesul social al matematicii nu va putea întîrzia prea mult.

INDICE DE AUTORI

Aleksandrov, A. D. 38
Anderson, J. T. 319
Appel, K. 328
Appell. P. 320, 321
Aramă, L. 105
Arbib, M. 123
Arhimede 52, 143, 264, 265, 291, 292
Aristotel 29, 63
Arrow, K. 143
Asachi, Gh. 138
Atiyah, M. 336

Bach, J. S. 34, 64, 102
Bacovia, G. 146
Banach, S. 64, 116, 161
Barbilian, D. 41, 87, 147, 168, 169, 232, 262
Barbu, I. 87, 140, 147, 168, 169, 232
Bar-Hillel, Y. 337
Barrow 267
Bălcescu, N. 212
Bâscă, O. 106
Berge, C. 150
Bernard, J. 53, 54, 60
Bernoulli, I 268
Bernoulli, J. 268
Bernstein, F. 324
Bertrand, J. 56
Bieberbach, L. 325, 326, 336
Bishop, E. 334–342
Bolyai, J. 60
Boboc, N. 187, 192, 284-286, 302
Bolzano, B. 243, 273, 274
Borel, E. 321-323, 347
Botvinnik, M. 345, 347
Bourbaki, N. 122
Brâncuși, C. 53, 66
Bridges, D. 340
Briggs, H. 291
Brouwer, L.E.J. 335, 337, 339, 340
Bucur, G. 105

Călude, C. 6, 147
Cantor, G. 40, 230, 231, 233, 324, 341
Caragiale, I. L., 167
Carman, R. A. 319
Carroll, L. 34
Cartan, E. 57, 58
Cauchy, A. 52, 209, 227–229, 233, 243, 246, 247, 261, 265, 269, 270, 273, 274, 321, 341
Cavalieri, F. B. 265
Călinescu, G. 202
Câmpan, F. T. 146, 227
Câmpu, E. 105
Cesaro, 96, 173, 175, 274
Charness, N. 344
Chițescu, I. 6, 299
Cioculescu, Ş. 140
Ciucu, G. 106
Claparède, E. 56
Colojoară, I. 187, 192, 284-286, 302
Columb, C. 53
Comberousse, C. de 323, 324
Coşbuc, G. 212
Coţa, A. 30, 233
Courant, R .219

Coxeter, H. 34
Craiu, V. 106
Creangă, I. 146
Cristescu, N. 138
Cuculescu, I. 21–25, 27, 31, 32, 88–96

Darboux, G. 91, 246, 247, 250, 251, 259, 260, 271, 272, 274, 275, 282–287, 306, 314–316
Darmoryad, A. P. 319
Dausset, J. 54
Dedekind, R. 40, 52, 230, 231, 233, 343
De Morgan 72, 73, 185
Denjoy, A. 282
Descartes, R. 233
Dinu, M. 66
Dirichlet, J. 270
Dobritzer, M. 39
Doob, J. L. 325, 327, 328
Drimer, D. 35
Dudeny, H. E. 332, 333
Duhamel, G. 102
Duhem, P. 57

Eilenberg, S. 123
Einstein, A. 55
Eminescu, M. 62, 66, 214
Enescu, G. 53, 214
Erdös, P. 294
Escher, M. C. 34, 64
Eschil 50, 58
Euclid 28, 50, 55, 58, 62
Eudox 264
Euler, L. 219, 233, 242, 265, 272, 294, 320, 321

Fan, K. 324
Fechner, G. 118, 296
Fermat, P. 104, 200, 233, 259, 260, 265, 312, 342
Fibonacci 117, 118, 128, 217
Fisher, R. A. 296
Fourier, J. 269
Franklin, B. 53
Fränkel, A. 51, 337
Fremlin, D. H. 340
Frey, P. W. 344
Froda, A. 323, 324

Galilei, G. 265, 266
Galois, E. 54, 60
Galton, F. 125
Gauss, K. F. 60, 233, 320
Găină, S. 105
Gelbaum, B. R. 200
Georgescu, H. 106
Goguen, J. A. 154
Goldbach, C. 79, 325, 336, 339, 342
Gorun, I. 344
Gödel, K. 34, 51, 62, 63, 68, 143
Grenander, U. 327
Gussi, G. 187, 191, 192, 230, 308

Hadamard, J. 53, 55–58, 89, 90, 294, 320
Hahn, H. 145
Haken, W. 326, 328
Haldane, J. S. 296
Halmos, P. 19, 122, 176, 329, 343
Hamilton, W. 233
Hardy, G. 103
Haret, S. 212
Hartley, R. V. 297
Hao, W. 62
Heliade Rădulescu, I. 138
Helmholtz, H. 56, 66
Henstock, R. 282
Hermite, C. 56, 57
Hesse, H. 344, 345
Hilbert, D. 16, 143, 348, 349
Hipocrate 48, 58
Hiriş, V. 105
Hjelmslev, L. 116
Hofstadter, D. R. 34
Homer 53

Iacob, C. 284
Iliescu, I. 105

Ionescu, B. 105
Ionescu, E. 11

Jacob, F. 53

Kepler, J. 56
Kleene, S. C. 337
Koch 328
Kolman, E. 40
Kolmogorov, A. N., 38, 60, 123
Kummer, E. 104
Kurzveil, J. 282
Kürthy, E. 30, 233

Lagrange, J. L. 1,19, 173, 233, 250, 261, 285, 300
Lalescu, T. 87, 145, 148
Lamartine, A. de 56
Lambert, J. H. 227
Lasker, E. 343
Lavrentiev, M. A. 38
Lazăr, Gh. 62, 138
Lebesgue, H. 271, 278–281, 321–323, 329
Legendre, A. M. 227
Leibniz, G. W. 29, 44, 52, 55, 117, 233, 246, 247, 252, 254 263, 264, 265, 268, 275–278 281, 299, 301, 311
Leonardo da Vinci 102, 263
Lévi-Strauss, C. 163
L'Hospital 308–310
Lipschitz, R. 304
Lobacevski, N. I. 60
Longinescu, G. G. 145
Luzin, N. 321–323, 329

Madachy, J. 333
Maliţa, M. 150
Manoliu, L. 134
Marcus, S. 34, 230, 297, 323, 344, 347, 349
Markov, A. A. 118, 340
Matei Săvulescu, A. 35
Mawhin, J. 266
Megan, M. 105
Mincu, M. 140
Mines, R. 340
Moisil, Gr. C. 36, 37, 39, 66, 76, 100, 119, 125, 129, 133, 145, 149, 344, 345
Monod, J. 53
Morgenstern, O. 120
Morozan, T. 105
Morozova, E. A. 88
Mozart, W. A. 56

Negrici, E. 62
Neper (Napier), J. 54, 288–293
Neumann, J. von 120
Newell, A. 346
Newton, I. 46, 53, 55, 59, 66, 224, 233, 246, 252, 254, 263, 267, 268, 275–278, 281, 295, 299, 301, 311
Nicolau, E. 34, 347
Nicolescu, M. 290, 308
Noether, E. 343
Noether, M. 343
Noica, C. 51, 66

Olmsted, J. M. H. 200
Onicescu, O. 347
Ottescu, C. 21–25, 27, 31, 32, 110

Panaitopol, L. 110
Pascal, B. 117, 153
Pasteur, L. 53
Păun, Gh. 121, 122, 130, 142–144, 147
Peano, G. 218, 222, 223
Perron, O. 282
Peter, R. 146
Petrakov, I. S. 88
Picard, E. 246
Pitagora 49, 64, 72, 117, 220, 247
Planck, M. 53

Platon 220, 264
Poincaré, H. 21, 28, 55–57 89, 90
Pompeiu, D. 278
Pop Corniș, M. 140
Popa, C. 105
Popa, E. F. 30, 233
Puşkin, A. S. 120

Radó, M. 39
Radu, D. 105
Rădulescu, M. 98
Rădulescu, S. 98
Răduțiu, M. 30, 233
Renan, E. 57
Rényi, A. 48, 58
Riemann, B. 56, 57, 59, 60, 64, 97, 189, 192, 241, 265, 268–271, 274, 275, 278–284, 300, 312, 320, 342
Robinson, A. 52, 55
Robbins, H. 219
Rolle, M. 91, 173, 199, 200, 260, 261
Roman, T. 110
Rosetti, A. 76

Sacter, O. 110
Sadoveanu, M. 214, 263
Sanders, B. L. 324
Săcuiu, I. 106
Schmidt, U. 328
Schubert, F. 54
Schweikart 60
Servien, P. 59
Shannon, C. 297, 346, 347
Shaw, J. 346
Simon, H. 346
Sireţchi, G. 97, 98, 106
Skvorţov, V. A. 88
Socrate 48, 58, 59, 92
Soerensen, S.P.L. 295
Stanley Ogilvy, C. 319
Stati, S. 34, 347
Stănăşilă, O. 187, 191, 192, 230, 308
Stieltjes, T. 320
Stoica, T. 187, 191, 192, 230, 308
Stoilow, S. 59, 138, 145
Suslin, M. 321–323, 329
Šanin, N. 340
Šafarevič, I. R. 59, 60

Şincai, G. 212
Şora, M. 61–67

Taine, H. 58
Tales 28, 72, 83, 247
Tarski, A. 69
Thom, R. 106, 120
Tomuleanu, V. 85
Torricelli, E. 53, 265–267

Ţiţeica, G. 87, 145

Udrişte, C. 82
Urmuz 202, 203, 206, 207

Valéry, P. 55, 56
Vallée Poussin, Ch. de la 294
Vianu, T. 61
Vieru, A. 131
Vrănceanu, G. 144
Vodă, V. 146, 147
Volterra, V. 117, 278
Vornicescu, F. 30, 233
Vuza, D. 131

Weber, E. H. 118, 296
Weierstrass, K. 56, 59, 98
Wright, S. 296

Zadeh, L. 61
Zermelo, E. 51
Zenon 128

THE MATHEMATICAL SHOCK

Abstract

This book is dealing with the mathematical shock, under various logical, psychological and social aspects, at various ages and for various professions. So, we are discussing the shock of the sudden passage from banal to unintelligible considerations, the shock of the axiomatic thinking, the shock of a rigor which is imposed but not understood, the shock of so many answers looking for their questions; the shock of the father who is no more able to help his children in the process of learning mathematics; the shock of an antiintuitive mathematics; the shock of so many students when passing from school to university mathematics; the shock of a qualitative mathematics; the shock of so many scientific and artistic fields facing with mathematical models and with mathematical thinking; the shock of a language which is more and more artificial and whose syntax may proliferate in the absence of semantics; the shock of a discrepancy between exactness and meaning, between meaning and value; the shock of a social command increasing in pressure and complexity; the shock of a society which is aware of only a part of its need of mathematics; the shock of mathematics as a global problem, because if science is a global problem of mankind, mathematics is a global problem of science.

If not too strong, the shock may fulfil a therapeutic function. Let us try to prevent and to attenuate it. This is the goal of this book, which by many of its parts is addresssing to a large public. Special attention is given to the young student who is preparing to face the competition of admission at university and to the university student who is facing the difficulties of higher mathematics. The cultural aspect of mathematics, so important for specialists in humanities, is carefully considered.

The first part of the book, less technical, is discussing topics such as: Mathematics and the choice of a profession; Mathematical thinking proceeds step by step; The role of the memory in mathematics; Before proving, we have to see; The deductive exposition begins with the end; Mathematical thinking without mathematical technics; To be abstract is not a shame; Convention and tradition in the mathematical notation; Words and symbols are equally important; The mathematical fiction; Fiction is more precise than reality; The analogy between mathematics and literature;

What is the usefulness of mathematics? Between invention and discovery; Poincaré, Hadamard and the aesthetics of science; One or several mathematics?; Šafarevič ideas; The hygiene of mathematical reasoning; The nonsense is more dangerous than the mistake; Two mathematical obsessions: *there exists* and *for any*; Negation, between correctness and comfort; Existence and uniqueness; Existential quantifiers challenge the imagination; Cuculescu's style; Mathematics against chronometer?; In absence of imagination, memory is overbided; The science and the art to formulate questions; Can we measure the mathematical performance?; Is mathematics of a competitive nature?; It is difficult to define the mathematics; The interdisciplinary potential of mathematics; Learn to search; Do the customer comes to the taylor or the tay or to the customer? Mathematical snobery; Mathematics and sport; What means to be a cultivated man?; Mathematics — an aristocratic science?; Rigor and competence; Mathematics and its public; Science and the professions of the future; Mathematics and the scientific-technical revolution; The pride to be a mathematician; The dialogue between mathematician and engineer; Mathematics, the "heavy industry" of science; The process of mathematization of science; More young people in mathematical research; Denotation and conotation in the use of words; Conotations in the mathematical language; Conotation as a source of confusion; Do not complicate things more than necessary; The traps of induction; Negation must be not only correct, but efficient too; Language problems in mathematics; The explanation of mathematical concepts needs the use of a natural language; Proofs cannot be reduced to calculations; Let us recall Urmuz; Language has to be kept under control; When the mathematical language leaves the tracks; Learning and research in strong interaction; Is the school manual a fundamental book?

The second part of the book contains several chapters devoted to a cultural and motivational discussion of some basic concepts, tools, theories and facts of modern mathematics: *Sequences, limit and convergence* (the nature of mathematical infinity; three modalities to identify a sequence; the epsilon-delta thinking; the convergence as a strategic game; Achille, the tortoise and the convergence); *From natural to complex numbers* (the *number*, as one of the first objects of mathematics; Peano axiomatics for natural numbers; the principle of mathematical induction; integers and rational numbers; Archimedes axiom; Why the rational numbers are not sufficient? Two ways to introduce the real numbers; real numbers as equivalent classes of Cauchy sequences of rational numbers; real numbers as open left unbounded intervals of rational numbers; constructive and descriptive aspects of real numbers; complex numbers in a historical setting); *Limit of a function* (behaviour in the neighborhood of a point; topological

aspects are unavoidable; relevant examples; variety of situations the sequence definition, the epsilon-delta and the topological definition; how to express the existence of a limit with no reference to its value); *Continuity a misleading property* (the itinerary Cauchy-Weierstrass-Darboux; continuity is different from both differentiability and Darboux property; various equivalent and non-equivalent variants of continuity; how can we sin when we do not check the continuity; continuity, a property born in the internal laboratory of Analysis); *The derivative* (derivative, velocity, tangent, density; derivability and infinite derivative; an approximation problem; differentiability and differential; the trap of the derivative of a compound function; be careful with the derivative of sinus!; some mean value theorems and the analogy between Rolle theorem and the Darboux property of a derivative; the essential role of interiority and compactness; geometric interpretation does not mean proof); *The integral* (the importance of historical aspects; the geometric and the cinematic perspective; the itinerary Galilei-Torricelli-Newton-Leibniz-Cauchy-Riemann; how discontinuous can be a Riemann integrable function?; convergence without limit and integrability without integral; intrinsic characterization of integrability by means of Darboux sums; similar characterization by means of Riemann sums; continuous functions are integrable derivatives; the itinerary Riemann-Lebesgue-Denjoy-Perron-Kurzveil-Henstock; any finite derivative is integrable in the sense of Kurzveil and Henstock and satisfies a Leibniz-Newton formula; a derivative has no discontinuity of first species); *The logaritm* (old and new aspects; the traps of the logaritmic function; why is the number *e* the natural basis of logaritms?; Archimedes, as a precursor in the study of logaritms; the axiomatic perspective; the logaritmic growth versus the exponential and the polynomial growth, their importance in Computer Science; the logaritm in physics, chemistry, biology, medical sciences, and psychology); *Some subtleties of mathematical analysis* (a strange tangent; two aspects of the charge of variable in the Riemann integral; mistakes leading to interesting problems; apparent and real perturbation of the property of uniform continuity; the functions between nonintuitivity and impossibility; relations between uniform continuity and uniform convergence; the traps of the L'Hospital rule; precautions in the study of convergence; the role of an hypothesis is tested by its cancellation); *The radiography of the error* (how can we measure the gravity of an error?; incorrect operations with correct results; mistakes leading to interesting theorems; celebrated mistakes; a theory born from an error; the theory of analytic sets; the radiography of a Lebesgue mistake; a Romanian work by A. Froda, devoted to the mathematical mistake;

the frequency of errors and the fight against them; is mathematics becoming an experimental science?; a bet proposed by J. L. Doob; the therapy of error; from mistakes of the beginners to the mistakes of the masters; benign printed errors); *The constructive thinking* (Bishop's challenge; constructive numbers; is mathematical language facing a schizophrenia disease?); *Chess and mathematics* (is chess mathematics?; deduction is not primordial neither in chess, nor in mathematics; between Hermann Hesse and Gr. C. Moisil; chess and artificial intelligence; from Shannon to Botvinnik; chess as a formal system; is chess thinking sequential or bidimensional?); *Education-dilemmas and hopes.*

SUMAR

Şocul matematicii 5

A FI BUN LA MATEMATICĂ

Două scrisori 7
Spre ce facultate să mi orientez? 9
Student cu orice preţ? 10
Matematica şi alegerea profesiunii 12
O schimbare radicală de la liceu la facultate 13
Gîndirea matematică procedează în etape 14
Referirea necontenită la faptele anterioare 15
Capacitatea de concentrare a atenţiei 17
Natura şi rolul memoriei matematice 18
Studiul matematicii alternează înaintările şi revenirile 19
Textele matematice se recunosc uşor 20
Două atitudini faţă de matematică 21
De la verificare la descoperire 23
Avantajele atitudinii active 24
Mai întîi vedem, apoi demonstrăm 26
Expunerea deductivă începe cu sfîrşitul 27
Buni în şcoală, slabi la admitere 29
Construcţia auxiliară, moment de imaginaţie 30
Teoreme vechi, utilizări noi 31
Demonstraţiile matematice, texte deschise 32
Gîndire matematică, fără ... matematică 33
Matematică şi şah 34
Gluma lui Moisil 36
Matematica la loto 37
Patru aspecte ale gîndirii matematice 38
Abstractul nu e un lucru de ruşine..... 40
Limbajul matematic, un blocaj? 41
Convenţie şi tradiţie în notaţia matematică 42
Cum rezistăm la schimbarea de notaţie? 44
De la enunţul în cuvinte la cel în simboluri şi invers 46
Ficţiunea matematică 47
Ficţiunea este mai precisă decît realitatea..... 48
Analogia dintre matematică şi literatură 50
La ce foloseşte matematica? 51
Între invenţie şi descoperire 53
Matematica: invenţie sau descoperire? 54
Poincaré, Hadamard şi estetica ştiinţei 55
Valoare şi alegere 56
O singură matematică? 58

Ideile lui Šafarevič 59
Transparent și translucid 61
Zona translucidă a matematicii 62
Context și in-text 64
In-textul științei 65
Igiena raționamentului matematic 67
Mai mult decît de greșeli, să ne ferim de nonsensuri 69
Conective sau operații logice 71
Inferență și predicate 72
Predicat logic și predicat gramatical 74
Disjuncția logică și conjuncția „sau" 75
Capcanele conjuncției „și" 75
Paranteze logice și paranteze lingvistice 76
Două obsesii ale matematicii: „există" și „orice" 77
Cuantificatori camuflați 78
Negarea, între corectitudine și comoditate 79
Existență și unicitate 81
Cum se mai ascund cuantificatorii? 83
Cuantificatorii existențiali provoacă imaginația 84
Generic și existențial 86
Nu ducem lipsă de talente 87
Stilul Cuculescu 88
Matematica la cronometru? 89
În absența imaginației este supralicitată memoria 91
Știința și arta de a întreba 91
Cum arată o problemă de olimpiadă 93
Putem măsura performanța matematică? 94
Este matematica de natură competitivă? 95
De la probleme de concurs la probleme pur și simplu 96
Pentru a aprofunda Analiza Matematică 97
E greu să definim matematica 98
Pedagogie matematică. Reflecții disparate 101
Culegeri de probleme 104
Cercetarea științifică a tinerilor 107
Creație și comunicare 108
Olimpiadele 110
Politehnizare 111
Să facem totul mai bine 113
Potențialul interdisciplinar al matematicii 114
Învață-te să cauți 126
Deschiderea matematicii 128
Vine clientul la croitor sau croitorul la client? 129
Un exemplu de colaborare interdisciplinară 131
Snobismul matematic 132
Matematică și sport 133
A fi om cult 135
Matematica — știință aristocratică? 137
Rigoare și competență 139
„Spectacolul matematicii" 142
Matematica și publicul ei 144
Exemplul tinerilor matematicieni 147
Matematica și revoluția științifico-tehnică 149
Mîndria de a fi matematician 153

Examene în sesiune şi examene la distanţă 154
Dialogul matematicianului cu inginerul 156
Procesul de matematizare a ştiinţei 160
Tinerii în activitatea de cercetare 164
Să ne antrenăm cu probleme neconvenţionale 167
Denotaţie şi conotaţie în folosirea cuvintelor 168
Conotaţii în limbajul matematic 169
Conotaţia, ca sursă de confuzie 170
Cum negăm proprietatea de monotonie? 172
A fi la obiect, act de disciplină elementară 173
A nu complica lucrurile în mod inutil 174
Din igiena gîndirii matematice 176
Capcanele inducţiei 180
De ce simplu cînd se poate şi complicat? 183
Cum „lipim" primitivele? 183
A nega corect şi eficient 185
Inegalităţi în Analiza matematică 187
Teoria şi practica să se cheme una pe alta! 190
Valorificarea teoremelor 191
Corect nu înseamnă şi util! 193
O substituţie adecvată 193
Atenţie la logaritm! 194
O integrare prin părţi şi un artificiu 194
O teoremă de tip L'Hospital şi o problemă de simetrie 195
Probleme de exprimare la probleme de matematică: O mentalitate păgubitoare 198
Explicarea conceptelor matematice se bazează pe limba naturală 198
Demonstraţiile au nevoie şi de „proză", nu numai de calcule 199
Carenţe gramaticale şi de ortografie 200
Să ne amintim de Urmuz 202
Urmuz la examenul de admitere 203
Limbajul trebuie ţinut sub control 204
Cînd limbajul matematic deraiază 205
Analogii nefericite 206
Sărmana sintaxă şi folosirea improprie a unor notaţii şi termeni 208
Învăţare, cercetare şi contracte în interacţiune cît mai puternică 210
A căuta, şi a afla 211
Manualul şcolar, o carte fundamentală 213

ŞIRURI, LIMITĂ, CONVERGENŢĂ

Pariul Analizei matematice 215
Radiografia unui caz 215
Atenţie la termenul general 217
Trei modalităţi de identificare a unui şir 217
Valori mari pentru n şi valori mici pentru epsilon 218
Convergenţa ca joc strategic 219
Alile, broasca şi convergenţa 220

DE LA NUMERE NATURALE LA NUMERE COMPLEXE

Numărul, primul obiect al matematicii
Mulțimea numerelor naturale.....
Principiul inducției complete .....
Numere întregi și numere raționale .....
De ce nu ne mulțumim cu numere raționale?
Mulțimea numerelor reale
Constructiv și descriptiv
Numere complexe

LIMITA UNEI FUNCȚII

Vecinătăți și apropiere .....
Din nou infinitatea este inevitabilă .....
Limita unei funcții ca limită de șiruri
Varietatea situațiilor
Versiunea epsilon-delta .....
Existența limitei fără implicarea valorii ei

CONTINUITATEA, O PROPRIETATE DERUTANTĂ

Două momente în evoluția ideii de continuitate
Variante ale continuității
Confruntarea variantelor .....
Cum putem greși cînd nu controlăm continuitatea

DERIVATA

Derivată, viteză, tangentă, densitate
Derivabilitate și derivată infinită
O problemă de aproximare .....
Diferențiabilitate și diferențială.....
Surprize în operațiile cu funcții derivabile
Atenție la derivata sinusului .....
Cum abordăm teoremele de medie.....
Interpretare geometrică nu înseamnă și demonstrație

INTEGRALA

O întrebare pentru elevii de clasa a XII-a
O problemă de geometrie .....
Perspectiva cinematică. Galilei și Torricelli
Momentul Isaac Newton
Gîndirea lui Leibniz.....
Rigoarea Cauchy-Riemann .....
Cît de discontinuă poate fi o funcție integrabilă Riemann? .....
Integrabilitatea fără integrală și convergență fără limită .....
Sumele Darboux și caracterizarea intrinsecă a integrabilității .....

Sumele Riemann și caracterizarea intrinsecă a integrabilității 274
Funcțiile continue sînt derivate integrabile 275
Teorema lui Leibniz și Newton 276
Integrarea, ca operație inversă derivării 277
Diviziuni compatibile cu o funcție pozitivă 279
Recuperarea formulei lui Leibniz și Newton pentru derivate finite arbitrare 280
Confruntarea dintre sumele Darboux și cele Riemann 282
Derivatele nu au discontinuități de prima specie.... 284

LOGARITMUL

Logaritmul, vechi și mereu nou 288
Logaritmul, ca problemă de Analiză 289
De ce este numărul *e* baza logaritmilor naturali? 290
Arhimede, precursor al logaritmilor 291
Logaritmul, în perspectivă axiomatică 292
Creșterea logaritmică 293
Logaritmul în fizică și chimie 294
Logaritmul în biologie, medicină și psihologie 296

SUBTILITĂȚI ALE ANALIZEI MATEMATICE

O tangentă bizară 298
Două aspecte ale schimbării de variabilă 299
Schimbarea de variabilă și sumele Riemann 300
Greșeli care conduc la probleme interesante 301
O perturbare aparentă și una reală 302
Funcții mărginite și contracții în sens larg 303
Funcțiile, între neintuitiv și imposibil 305
Alte probleme posibile, de acest fel 307
De la continuitate uniformă la convergență uniformă 307
Cînd se abuzează de regula lui L'Hospital ... 308
Și cînd se eludează regula lui L'Hospital 309
O funcție neobișnuită cere o abordare neobișnuită .. 311
Precauții în studiul convergenței unui șir 313
Capcanele operației de compunere 314
Cît de esențială este o ipoteză? 315

RADIOGRAFIA GREȘELII

Cum măsurăm gravitatea unei erori? 317
Operații incorecte cu rezultate corecte 318
Greșeli care sugerează teoreme 319
Greșeli celebre 320
O teorie născută din observarea unei greșeli 321
Radiografia greșelii lui Lebesgue 322
O lucrare românească despre eroarea matematică 323
Frecvența greșelilor și lupta împotriva lor 325
Devine matematica o știință experimentală ? 326
Pariul lui J.L.Doob 327
Terapia greșelii 329

Două zone de manifestare a greşelii
Greşeli de tipar benigne

GÎNDIREA CONSTRUCTIVISTĂ

Provocarea lui Bishop
Gîndirea constructivistă .....
Numere constructive

ŞAHUL ÎN FAŢA MATEMATICII

Este şahul matematică? .....
Deducţia nu primează nici în şah, nici în matematică .....
Între Hermann Hesse şi Gr.C. Moisil
Şahul şi inteligenţa artificială
De la Shannon la Botvinnik
Şahul ca sistem formal .....
Este gîndirea şahistă secvenţială sau bidimensională?

Învăţămîntul — dileme şi speranţe

Indice de autori
The mathematical shock

Lector : CONSTANDINA PALIGORA
Tehnoredactor : GABRIELA ILIOPOLOS

Bun de tipar 9.III.1987. Apărut 1987.
Comanda nr. 2718.
Coli de tipar 23.

Tiparul executat sub comanda nr. 15 la
Întreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89-97
Bucureşti,
Republica Socialistă România

Dacă nu este prea puternic, șocul îndeplinește o funcție terapeutică. Să încercăm deci să-l preîntîmpinăm și să-l atenuăm. Către aceasta aspiră cartea de față, care în multe părți ale ei se adresează publicului larg, dar care-și menține tot timpul un ochi îndreptat spre elevul aflat în apropierea concursului de admitere în învățămîntul superior, spre studentul intimidat de manualele universitare de matematică, spre intelectualul care, independent de specialitatea sa, desiușește în matematică un act de cultură care-l privește.

SOLOMON MARCUS

Lei 16